УДК 519.21

В. А. Дубко

Интегрирование по начальным данным, интегральный инвариант Пуанкаре и уравнения «Гамильтона» для диффузионных процессов

Нахождение функционалов от случайных процессов, поведение которых не является случайным, представляет интерес в силу тесной связи с вопросами существования инвариантных множеств, областей асимптотической устойчивости, законов сохранения для открытых систем, описываемых стохастическими процессами.

В работе на основе интегралов от случайных процессов по начальным данным устанавливаются условия сохранения некоторых интегралов от процессов, подчиненных системе стохастических дифференциальных уравнений (стохастического объема, интеграла Пуанкаре), что связано с исследованием возможностей и следствий перенесения на теорию стохастических динамических систем некоторых принципов аналитической механики.

Пусть $x(t)$ — диффузионный процесс в R^n, удовлетворяющий системе стохастических уравнений

$$d_t x_i(t) = a_i(x(t); t)\,dt + \beta b_{i,r}(x(t); t)\,dw_r(t), \tag{1}$$

где $w_r(t)$ — m-мерный винеровский процесс, $i = \overline{1, n}$, $r = \overline{1, m}$, β — параметр, а по индексам, встречающимся дважды, ведется суммирование.

Если существуют непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial a_i(x; t)}{\partial x_j}$; $\dfrac{\partial b_{i,r}(x, t)}{\partial x_j}$ и $a_i(x; t)$, $b_{i,r}(x; t)$ — непрерывные функции по t, то случайная величина

$$J_{i,k}(t) = \text{l.i.m.}\ \frac{x_i(t; x(0) + \Delta) - x_i(t; x(0))}{\Delta_k}$$

является решением системы уравнений [1, с. 278]

$$d_t J_{i,k}(t) = d\cdot\frac{\partial a_i(x(t); t)}{\partial x_j}\cdot J_{j,k}(t) + \beta\cdot\frac{\partial b_{i,r}(x(t); t)}{\partial x_j}\cdot J_{j,k}(t)\,dw_r(t), \tag{2}$$

$$J_{i,k}(0) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1, & = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Используя случайные величины $J_{i,k}(t) = J_{i,k}(t; x(0))$, можно построить аналоги таких величин из математического анализа, как элемент дуги, объема и т. д., следующим образом.

Определение 1. Векторным дифференциалом дуги $L(t, l_0(\mu)) = L_t$, определяемой случайным процессом $x(t)$, подчиненным системе (1), назовем случайную величину $d\vec{L}_t = \vec{e}_i J_{i,k}(t)\,dx_k(\mu)$, где $(\vec{e}_i, e_j) = \delta_{i,j}$, $x_k(\mu)$ — параметрическое задание кривой l_t в момент $t = 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Векторным дифференциалом поверхности $S_t = S(t, S(0))$, определяемой случайным процессом $x(t)$, подчиненным системе (1), назовем случайную величину $d\vec{S_t} = \vec{e_i} D_{i,k}(t)\, dS_k(0)$, где $S(0) = S(x(0)) = \text{const}$, $(-1)^{i+k} D_{i,k}(t)$ — определитель алгебраического дополнения к элементу $J_{i,k}$ матрицы Якобиана D_t составленной из величин $J_{i,k}(t)$; $dS_k(0) = \prod\limits_{k \neq j=1}^{n} dx_j(0)$.

О п р е д е л е н и е 3. Под элементом стохастического объема, определяемого процессом $x(t)$, подчиненным системе (1), будем понимать случайную величину $d\Gamma(t) = D_t d\Gamma(0)$, где $d\Gamma(0) = \prod\limits_{i=1}^{n} dx_i(0)$.

Интегрирование функции по случайному объему $\Gamma(t)$, поверхности S_t, дуге l_t проводится обычным методом средних квадратичных пределов для любых непрерывных по z, x и функций $f_i(x, z, t)$. Случайные величины

$$I_t(\Gamma(t)) = \int\limits_{\Gamma(0)} \ldots \int f(x(0); x(t; x(0)); t)\, D_t d\Gamma(0),$$

$$I_t(S_t) = \int\limits_{S_0} \ldots \int \vec{f}(x(0); x(t); x(0)); t)\, d\vec{S}_t,$$

$$I_t(L_t) = \int\limits_{L_0} \vec{f}(x(0); x(t; x(0)); t)\, d\vec{L}_t$$

в указанном смысле единственны, и на эти интегралы переносятся методы и соотношения интегрального исчисления.

Условие сохранения величин I_t связано с установлением требований к f_i и $x(t)$, при которых $d_t I_t = 0$, $\forall t \geqslant 0$.

Перейдем к определению условий сохранения конкретных I_t.

1. Сохранение стохастического объема.

Т е о р е м а 1. *Необходимым и достаточным условием сохранения стохастического объема*

$$\Gamma(t) = \int\limits_{\Gamma(0)} \ldots \int D_t d\Gamma(0),$$

порожденного случайным процессом $x(t)$, *удовлетворяющим системе* (1), *является выполнение следующих требований:*

$$\text{а)}\quad \frac{\partial a_i(x;t)}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(b_{i,r}(x;t) \cdot b_{j,r}(x,t)) = 0,$$

$$\text{б)}\quad \frac{\partial b_{i,r}(x;t)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall r = \overline{1, m}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3}$$

Доказательство этого утверждения основывается на установлении условий, при выполнении которых D_t является первым интегралом системы (1)—(2) (см. [2]).

2. Интегральный инвариант Пуанкаре. Установим условия сохранения величины (интегрального инварианта 1-го рода [3, с.136])

$$I_t = \oint\limits_{L_t} x_i(t)\, \delta x_{i+n}(t), \tag{4}$$

где $\delta x_{i+n}(t)$ — $(i+n)$-я проекция элемента дуги $d\vec{L_t}$ одновременных состояний в момент t ([3, с. 136]) для стохастического случая

$$d_t x_i(t) = a_i(x(t); t)\, dt + \beta b_{i,r}(x(t); t)\, dw_r(t),$$

$$d_t x_{i+n}(t) = a_{i+n}(x(t); t)\, dt + \beta b_{i+n,r}(x(t); t)\, dw_r(t). \tag{1^1}$$

Опираясь на построение для $d\vec{L}_t$, приведенное в определении 3, докажем теорему.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием сохранения интеграла (4), определяемого процессом $x(t) \in R^{2n}$, подчиненного системе (1¹), является существование таких функций $H(x; t) = H$ и $H_r(x; t) = H_r$, что возможно представление

$$\text{а)}\quad b_{i,r}(x; t) = \frac{\partial H_r}{\partial x_{i+n}}, \quad b_{i+n,r}(x; t) = -\frac{\partial H_r}{\partial x_i},$$

$$\text{б)}\quad a_i(x; t) = -\frac{1}{2}\beta^2\left[\frac{\partial^2 H_r}{\partial x_{i+n}\partial x_{j+n}}\cdot\frac{\partial H_r}{\partial x_j} - \frac{\partial H_r}{\partial x_{j+n}}\cdot\frac{\partial^2 H_r}{\partial x_{i+n}\partial x_j}\right] + \frac{\partial H}{\partial x_{i+n}}$$

$$a_{i+n}(x; t) = \frac{1}{2}\beta^2\left[\frac{\partial^2 H_r}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\frac{\partial H_r}{\partial x_j} - \frac{\partial H_r}{\partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_r}{\partial x_i\partial x_j}\right] - \frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Схема доказательства этой теоремы подобна схеме установления условий инвариантности (4) в классической механике [3, с. 136] с учетом стохастичности $x_i(t)$, $x_{i+n}(t)$ и $J_{i,k}(t)$ (формулы (1¹) и (2)).

Воспользовавшись условием а) и б) теоремы 2, приходим к таким соотношениям:

$$\text{а}^1)\quad -\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 b_{i,r}(x; t)\, b_{j,r}(x; t)}{\partial x_i\partial x_j} + 2\,\frac{\partial^2 b_{i+n,r}(x; t)\, b_{j,r}(x; t)}{\partial x_{i+n}\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 b_{i+n,r}(x; t)\, b_{j+n,r}(x; t)}{\partial x_{i+n}\partial x_{j+n}}\right) + \frac{\partial a_i(x; t)}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{i+n}(x, t)}{\partial x_{i+n}} = 0,$$

$$\text{б}^1)\quad \frac{\partial b_{i,r}(x; t)}{\partial x_i} + \frac{\partial b_{i+n,r}(x; t)}{\partial x_{i+n}} = 0, \quad \forall r = \overline{1, l}.$$

Эти соотношения совпадают с требованиями теоремы 1, т. е. если система стохастически Гамильтонова, стохастический объем — инвариант.

Для таких стохастических гамильтоновых систем устанавливаются и другие соотношения, встречающиеся в классической аналитической механике. Например, из утверждения, что

$$I_t' = \oint\limits_{i0} g_i(x(t), t)\, J_{i,k}(t)\, dx_k(\mu) + q_i(x(t); t)\, J_{i+k,k}(t)\, dx_k(\mu) -$$

универсальный относительный интегральный инвариант [3, с.138], следует соотношение $I_t' = cI_t$, где I_t — интеграл Пуанкаре, C — постоянная (стохастический аналог теоремы Ли-Хуа-Чжуна [3, с. 139]).

Система (1) дополняется до «гамильтоновой», если ввести «гамильтонианы» (проверяется непосредственной подстановкой в условия а) и б) теоремы 2) $H_r(x; z; t) = z_i b_{i,r}(x; t)$, $H(x; z; t) = a_i(x; t)\, z_i + \frac{1}{2}\beta^2 z_i z_j \frac{\partial b_{j,r}(x; t)}{\partial x_k} \times$

$\times \frac{\partial b_{k,r}(x; t)}{\partial x_i}$. Такие системы можно рассматривать как некоторый стохастический образ системы Гамильтона. При $\beta = 0$ приходим к обычной системе Гамильтона.

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К.: Наук думка, 1968.— 355 с.
2. Дубко В. А. Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений.— Препринт 78.27. К., Ин-т математики АН УССР. 22с.
3. Гантмахер Ф. Ю. Лекции по аналитической механике.— М.: Наука, 1966. 300 с.

Институт кибернетики
АН УССР

Поступила в редакцию
23.05.1980 г.