УДК 517.53

Н. В. Заболоцкий

Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик мероморфной функции нулевого рода

В данной работе исследуется связь между ростом характеристики $T(r, f)$ мероморфной функции нулевого рода и величины $N_0(r) = \max\{N(r, a), N(r, b)\}$, измеренных относительно функции $V(r) = r^{\rho(r)}$, где $N(r, a)$, $N(r, b)$ — неванлинновские функции числа соответственно a — точек и b —точек функции f, $a \neq b$, $\rho(r)$ — уточненный порядок функции f[1, с. 69].

Во всех теоремах будем считать, не уменьшая общности, что $a = 0$, $b = \infty$, $f(0) = 1$.

Теорема 1. *Если f — мероморфная функция порядка $\rho = 0$, то пределы*

$$\lim_{r\to\infty} T(r, f)/V(r), \quad \lim_{r\to\infty} N_0(r)/V(r)$$

существуют или не существуют одновременно и при существовании равны.

Для целых функций эта теорема верна и при $\rho \leqslant 0{,}5$ [3], [4].

Доказательство. Если $N_0(r) \sim KV(r)$, $r\to\infty$, то из неравенства 4.17 из [1, с.90]

$$N_0(r) \leqslant T(r, f) \leqslant r\int_r^\infty N_0(t)\, t^{-2} dt$$

получаем, что $T(r, f) \sim KV(r)$, $r\to\infty$. Пусть $T(r, f)\sim KV(r)$, $r\to\infty$. Тогда $N_0(r) \leqslant (K + o(1))\,V(r)$, $r\to\infty$. Предположим, что соотношение $N_0(r) \sim KV(r)$, $r\to\infty$, не выполняется, т. е. существуют L, $0 < L < K$, и последовательность (r_k) такая, что $N_0(r_k) = LV(r_k)$. При $t_k = 0{,}5r_k$ для достаточно больших r_k имеем

$$(K-\varepsilon)\, V(t_k) \leqslant T(t_k, f) \leqslant t_k \int_{t_k}^{r_k} N_0(t)\, t^{-2} dt + t_k \int_{r_k}^{\infty} N_0(t)\, t^{-2} dt \leqslant 0{,}5LV(r_k) +$$

$$+ (K+\varepsilon)\, t_k r_k^{-1} V(r_k)(1+\varepsilon) = 0{,}5V(t_k)(L + (K+\varepsilon)(1+\varepsilon)),$$

где ε — произвольное малое число, $0 < \varepsilon < 1$. Отсюда получаем $K \leqslant 0{,}5 \times (L + K)$, что невозможно.

Теорема 2. *Для мероморфной функции f порядка ρ, $0 < \rho < 1$, имеет место неравенство*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, T(r, f)/V(r) \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\, N_0(r)/V(r) \sec(0{,}5\pi\rho). \tag{1}$$

Существует функция f, для которой в (1) *имеет место равенство.*

Доказательство. По теореме 5.9 [2] можно считать, что нули f — отрицательные, а полюсы положительные. Пусть

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, N_0(r)/V(r) = K, \quad A = \{r: |f(r)| < 1\}, \quad B = \{r: |f(-r)| > 1\}.$$

Для $r \,\overline{\in}\, A \cup B$ выполняется равенство (4.48) из [2]

$$T(r, f) \leqslant \int_0^\infty N(t, 0)\, P(t, r, \beta)\, dt + \int_0^\infty N(t, \infty)\, P(t, r, \pi-\beta)\, dt, \tag{2}$$

где $P(t, r, \varphi) = r\sin\varphi\cdot\pi^{-1}(t^2 + 2tr\cos\varphi + r^2)^{-1}$, $0 < \beta < \pi$, $|f(re^{i\beta})| = 1$.

Из (2) получаем при $r \overline{\in} A \cup B$, $r \to \infty$ (ср. [1, с. 92 — 93])

$$T(r, f) \leqslant \int_0^\infty (K + o(1)) V(t) (P(t, r, \beta) + P(t, r, \pi - \beta))\, dt = (K + o(1)) V)r) \times$$

$$\times (\sin(\beta\rho) + \sin((\pi - \beta)\rho)) \sin^{-1}(\pi\rho) = (K + o(1)) V(r) \sec(0{,}5\,\pi\rho).$$

Отсюда следует (1). При $r \in AVB$ имеем $T(r, f) = N_0(r)$, и (1) очевидно.

Для функции $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \{(n^{1/\rho} + z)/(n^{1/\rho} - z)\}$, $0 < \rho < 1$, порядка ρ в (1) имеет место равенство.

Теорема 3. *Пусть f_1 и f_2 — мероморфные функции нулевого рода с положительными полюсами и отрицательными нулями. Если $N(r, f_1) \geqslant N(r, f_2)$, $N(r, f_1^{-1}) \geqslant N(r, f_2^{-1})$, то $T(r, f_1) \geqslant T(r, f_2)$.*

Доказательство. Введем функции (см. [7]) в $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$

$$T_1(re^{i\theta}, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta \ln |f_j(re^{i\varphi})|\, d\varphi + N(r, f_j), \quad 0 < \theta < \pi, \quad j = 1, 2.$$

В [7] указано, что они гармоничны в H, непрерывны в $\overline{H} \setminus \{0\}$ и ограничены в окрестности $z = 0$. Легко видеть [7], что $T_1(r, f_j) = N(r, f_j)$, $T_1(-r, f_j) = N(r, f_j^{-1})$, $\max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} T_1(re^{i\theta}, f_j) = T(r, f_j)$, $j = 1, 2$.

Так как $T_1(r, f_1) \geqslant T_1(r, f_2)$, $T_1(-r, f_1) \geqslant T_1(-r, f_2)$, $0 \leqslant T_1(re^{i\theta}, f_j) = o(r)$, $r \to \infty$, $j = 1, 2$, то согласно принципу Фрагмена—Линделефа [5, с. 87] получаем $T(r, f_1) \geqslant T(r, f_2)$.

Следствие. *Для мероморфной функции f нулевого рода справедливо неравенство*

$$T(r, f) \leqslant \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty N_0(t) \frac{dt}{t^2 + r^2}. \tag{3}$$

Доказательство. Учитывая теорему 5.9 из [2, с.165] и теорему 3, имеем $T(r, f) \leqslant T(r, \hat{f})$, где $\hat{f}$—мероморфная функция нулевого рода с положительными полюсами и отрицательными нулями такими, что $N(r, \hat{f}) \equiv N(r, \hat{f}\, l^{-1}) \equiv N_0(r, f)$.

Тогда $\beta = \pi/2$ и из равенства (2) получаем (3).

Докажем некоторые вспомогательные результаты. Рассмотрим уравнение $Qe^x = x + 1$, $0 \leqslant Q \leqslant 1$, $x \in \mathbf{R}$. Обозначим $\tau = \tau(Q)$, $\sigma = \sigma(Q)$ соответственно неотрицательный и неположительный корни этого уравнения, причем при $Q = 0$ полагаем $\tau(0) = +\infty$. При $Q = 1$ имеем $\tau = \sigma = 0$. Пусть $0 < \rho < 1$. Рассмотрим при $0 \leqslant q < \infty$ функцию $(0 \leqslant Q \leqslant 1)$

$$\psi(q; Q) = \int_{q\exp(-\tau/\rho)}^{q} (t^\rho - \rho e^{-\tau} q^\rho \ln(t/q) - q^\rho Q) \frac{dt}{t^2 + 1} +$$

$$+ \int_q^{q\exp(-\sigma/\rho)} \left(t^\rho - \rho e^{-\sigma} \ln \frac{t}{q}\, q^\rho - q^\rho Q\right) \frac{dt}{t^2 + 1}. \tag{4}$$

Из (4) легко видеть, что $\psi(q; 1) \equiv 0$, $\psi(q; 0) \to \pi/2 \sec(\pi\rho/2)$ при $q \to +\infty$. Покажем, что при фиксированном Q, $0 < Q < 1$, функция $\psi(q) = \psi(q; Q)$ имеет максимум при $0 < q < \infty$, который достигается в одной точке. Учитывая, что подынтегральные выражения в обоих интегралах в (4) неотрицательны, нетрудно получить $\psi(q) > 0$ при $0 < q < \infty$, $\psi(0) = 0$, $\psi(q) \to 0$ при $q \to +\infty$. Можно показать, что

$$\psi_1(q) = -\psi'(q)\, q^{1-\rho}/\rho \to 0 \quad \text{при} \quad q \to +0 \quad \text{и} \quad q \to +\infty, \tag{5}$$

$$\psi_2(q) = q\psi_1'(q) \to 0 \quad \text{при} \quad q \to +0 \quad \text{и} \quad q \to +\infty, \tag{6}$$

$$\psi_2'(q) = (a_1q^6 + a_2q^4 + a_3q^2 + a_4)/\{(q^2+1)^2(q^2e^{-2\tau/\rho}+1)(q^2e^{-2\sigma/\rho}+1)\}, \tag{7}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — фиксированные действительные числа, которые определяются числами ρ, τ, σ.

Так как функция $\psi_1(q)$ аналитическая в точках $q = 0$ и $q = \infty$ (это становится очевидным, если в интегралах (4) сделать замену $t = qt'$), то $\psi'(q)$ имеет в достаточно малых окрестностях этих точек на $\mathbf{R}^+$ определенный знак.

Учитывая поведение $\psi(q)$ в этих окрестностях, в силу (5) получаем

$$\psi_1(q) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < q < \delta, \ \delta > 0, \tag{8}$$

$$\psi_1(q) > 0 \quad \text{при достаточно больших } q. \tag{9}$$

Из аналитичности функции $\psi_2(q)$ в точках $q=0$ и $q=\infty$ в силу (5), (8), (9) получаем

$$\psi_2(q) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < q < \delta, \ \delta > 0, \tag{10}$$

$$\psi_2(q) < 0 \quad \text{при достаточно больших } q. \tag{11}$$

Учитывая (6), (10), (11), из аналитичности $\psi_2'(q)$ получаем

$$\psi_2'(q) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < q < \delta, \ \delta > 0, \tag{12}$$

$$\psi_2'(q) > 0 \quad \text{при достаточно больших } q. \tag{13}$$

Из (7), (12), (13) видим, что уравнение $\psi_2'(q) = 0$ при $0 < q < \infty$ имеет или один корень, или один простой и один кратный корень, или три простых корня. В первых двух случаях в силу (10)—(13) получаем противоречие с соотношениями (8) и (9). Из того, что уравнение $\psi_2'(q) = 0$ имеет три простых корня, в силу (8) — (13) получаем, что уравнение

$$\psi_q'(q; Q) = 0, \quad 0 < q < \infty, \tag{14}$$

имеет единственное решение q_0.

Теорема 4. *Пусть f — мероморфная функция порядка ρ, $0<\rho<1$,*

$$\varlimsup_{r\to\infty} N_0(r)/V(r) = K, \quad \varliminf_{r\to\infty} N_0(r)/V(r) = L,$$

$\psi\left(q; \dfrac{L}{K}\right)$ *имеет вид* (4), q_0 — *корень уравнения* (14). *Имеет место неравенство*

$$\varliminf_{r\to\infty} T(r, f)/V(r) \leqslant K\left\{\sec\frac{\pi\rho}{2} - \frac{2}{\pi}\,\psi\left(q_0; \frac{L}{K}\right)\right\} \tag{15}$$

и существует функция f, для которой в (15) *имеет место равенство.*

Доказательство. В случае $L = K$ утверждение теоремы становится очевидным. Пусть $L < K$ и $\rho(r) \equiv \rho$. Не уменьшая общности, можем считать, что $N_0(e^t) \leqslant K_1e^{\rho t}$ для $-\infty < t < +\infty$ и существует последовательность (t_k) такая, что $N_0(e^{t_k}) = L_1e^{\rho t_k}$, где $K_1 = K + \varepsilon$, $L_1 = L + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Проведем из точки $(t_k, L_1e^{\rho t_k})$ касательные к графику $y = K_1e^{\rho t}$, $-\infty < t < +\infty$. Получим уравнения $y_1(t) = K_1\exp(\rho t_k - \tau_1)\rho(t - t_k) + L_1\exp(\rho t_k)$, $y_2(t) = K_1\exp(\rho t - \sigma_1)\rho(t - t_k) + L_1\exp(\rho t_k)$, где $\tau_1 = \tau(L_1/K_1)$,

$\sigma_1 = \sigma(L_1/K_1)$ определены выше. Далее будем вместо τ_1, σ_1 писать τ, σ.

Учитывая, что функция $N_0(e^t)$ выпуклая относительно t, получаем ($r_k = \exp t_k$)

$$N_0(r) \leqslant \begin{cases} K_1 V(r), & 0 \leqslant r \leqslant r_k \exp(-\tau/\rho), \\ \left(K_1 \rho e^{-\tau} \ln \dfrac{r}{r_k} + L_1\right) V(r_k), & r_k \exp(-\tau/\rho) \leqslant r \leqslant r_k, \\ \left(K_1 \rho e^{-\sigma} \ln \dfrac{r}{r_k} + L_1\right) V(r_k), & r_k \leqslant r \leqslant r_k \exp(-\sigma/\rho), \\ K_1 V(r), & r_k \exp(-\sigma/\rho) \leqslant r < \infty. \end{cases}$$

Учитывая (3), получаем

$$T(r,f) \leqslant \frac{2r}{\pi}\left\{\int_0^\infty K_1 V(t) \frac{dt}{r^2+t^2} - \int_{r_k \exp(-\tau/\rho)}^{r_k} \left(K_1 V(t) - \right.\right.$$

$$\left. - \left(K_1 \rho e^{-\tau} \ln \frac{t}{r_k} + L_1\right) V(r_k)\right) \frac{dt}{t^2+r^2} -$$

$$\left. - \int_{r_k}^{r_k \exp(-\sigma/\rho)} \left(K_1 V(t) - \left(K_1 \rho e^{-\sigma} \ln \frac{t}{r_k} + L_1\right) V(r_k)\right) \frac{dt}{r^2+t^2}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} K_1 \left\{\frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi\rho}{2} V(r) - \int_{\exp(-\tau/\rho)}^{1} \left(s^\rho - \rho e^{-\tau} \ln s - \frac{L_1}{K_1}\right) V(r_k) \frac{r_k r\, ds}{r^2 + r_k^2 \cdot s^2} - \right.$$

$$\left. - \int_1^{\exp(-\sigma/\rho)} \left(s^\rho - \rho e^{-\sigma} \ln s - \frac{L_1}{K_1}\right) V(r_k) \frac{r_k r\, ds}{r^2 + r_k^2 \cdot s^2}\right..$$

При $0 < q < \infty$ получаем

$$T(r_k/q, f) \leqslant V(r_k)\, q^{-\rho} K_1 \left\{\sec(\pi\rho/2) - \frac{2}{\pi} \times \right.$$

$$\times \left\{\int_{\exp(-\tau/\rho)}^{1} \left(V(sq) - \rho e^{-\tau} q^\rho \ln s - \frac{L_1}{K_1} q^\rho\right) \frac{q\, ds}{q^2 s^2 + 1} - \right.$$

$$\left.\left. - \int_1^{\exp(-\sigma/\rho)} \left(V(sq) - \rho e^{-\sigma} q^\rho \ln s - \frac{L_1}{K_1} q^\rho\right) \frac{q\, ds}{q^2 s^2 + 1}\right\}\right\} =$$

$$= V(r_k)\, q^{-\rho} K_1 \left\{\sec \frac{\pi\rho}{2} - \frac{2}{\pi} \psi(q; L_1/K_1)\right\}.$$

Отсюда $\varlimsup\limits_{r\to\infty} T(r,f)/V(r) \leqslant K_1 \left(\sec \dfrac{\pi\rho}{2} - 2/\pi \psi(q; L_1/K_1)\right)$.

Устремив ε к нулю и положив $q = q_0$, получаем (15). Переход от $\rho(r) \equiv \equiv \rho$ к общему случаю делается, как в [6]. Укажем пример функции f, для которой выполнены условия теоремы 4 и в (15) имеет место равенство. При $L=0$ правая часть (15) обращается в нуль и, очевидно, в (15) имеет место равенство. Пусть числа L, K, ρ удовлетворяют условиям $0<L<K<\infty$, $0<\rho<1$, последовательность (r_k) строго монотонно возрастает и $r_{k+1}/r_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Построим каноническое произведение $\varphi(z)$ нулевого рода с отрицательными нулями и

$$n(r,0,\varphi)=\begin{cases}[K\rho V(r)], & r_{k-1}\exp(-\sigma/\rho)\leqslant r<r_k\exp(-\tau/\rho),\\ [K\rho e^{-\tau}V(r_k)], & r_k\exp(-\tau/\rho)\leqslant r<r_k,\\ [K\rho e^{-\sigma}V(r_k)], & r_k\leqslant r<r_k\exp(-\sigma/\rho).\end{cases}$$

Положим $f(z)=\varphi(z)/\varphi(-z)$. Имеем $n_0(r)=\max\{n(r,f),\ n(r,f^{-1})\}=n(r,0,\varphi)$, откуда $(r\to\infty)$

$$N_0(r)\sim\begin{cases}KV(r), & r_{k-1}\exp(-\sigma/\rho)\leqslant r\leqslant r_k\exp(-\tau/\rho),\\ \left(K\rho e^{-\tau}\ln\dfrac{r}{r_k}+L\right)V(r_k), & r_k\exp(-\tau/\rho)\leqslant r\leqslant r_k,\\ (K\rho e^{-\sigma}\ln(r/r_k)+L)\,V(r_k), & r_k\leqslant r\leqslant r_k\exp(-\sigma/\rho).\end{cases}$$

Следовательно $\varliminf\limits_{r\to\infty}N_0(r)/V(r)=L$, $\varlimsup\limits_{r\to\infty}N_0(r)/V(r)=K$.

Возьмем r, $\sqrt{r_kr_{k-1}}\leqslant r\leqslant\sqrt{r_kr_{k+1}}$. Учитывая, что

$$\frac{2r}{\pi}\int\limits_0^{2r_{k-1}\exp(-\sigma/\rho)}KV(t)\,\frac{dt}{r^2+t^2}\leqslant\frac{2K}{\pi r}\int\limits_0^{2r_{k-1}\exp(-\sigma/\rho)}V(t)\,dt=o(V(r)),\quad r\to\infty,$$

$$\frac{2r}{\pi}\int\limits_{0,5r_{k+1}\exp(-\tau/\rho)}^{\infty}\frac{dt}{r^2+t^2}\leqslant\frac{2Kr}{\pi}\int\limits_{0,5r_{k+1}\exp(-\tau/\rho)}^{\infty}V(t)\,t^{-2}\,dt=o(V(r)),\quad r\to\infty,$$

из равенства (2) получаем

$$T(r,f)\geqslant\frac{2r}{\pi}K(1+o(1))\left\{\int\limits_{2r_{k-1}\exp(-\sigma/\rho)}^{r_k\exp(-\tau/\rho)}V(t)\,\frac{dt}{r^2+t^2}+\right.$$

$$+\int\limits_{r_k\exp(-\sigma/\rho)}^{0,5r_{k+1}\exp(-\tau/\rho)}V(t)\,\frac{dt}{r^2+t^2}+\int\limits_{r_k\exp(-\tau/\rho)}^{r_k}\left(\rho e^{-\tau}\ln\frac{t}{r_k}+\frac{L}{K}\right)V(r_k)\,\frac{dt}{r^2+t^2}+$$

$$\left.+\int\limits_{r_k}^{r_k\exp(-\sigma/\rho)}\left(\rho e^{-\sigma}\ln\frac{t}{r_k}+\frac{L}{K}\right)V(r_k)\,\frac{dt}{r^2+t^2}\right\}=$$

$$=K(1+o(1))\left\{\sec\frac{\pi\rho}{2}V(r)-\frac{2}{\pi}V(r_k)\left\{\int\limits_{\exp(-\tau/\rho)}^{1}\left(s^\rho-\rho e^{-\tau}\ln s-\frac{L}{K}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{r_kr\,ds}{r^2+r_k^2s^2}+\int\limits_1^{\exp(-\sigma/\rho)}\left(s^\rho-\rho e^{-\sigma}\ln s-\frac{L}{K}\right)\frac{r_kr\,ds}{r^2+r_k^2s^2}\right\}\right\}.$$

Пусть q_0 — корень уравнения (14). Из последнего неравенства при $r = r_k/q_0$ получаем $\underline{\lim}_{r\to\infty} T(r, f)/V(r) \geqslant K\left\{\sec\frac{\pi\rho}{2} - \frac{2}{\pi}\psi\left(q_0; \frac{L}{K}\right)\right\}$, что доказывает неулучшаемость оценки (15). Сформулируем аналог теоремы 4 для случая целой функции.

Теорема 5. *Пусть f — целая функция порядка ρ, $0<\rho<1$, $\underline{\lim}_{r\to\infty} N(r, f^{-1})/V(r) = L$, $\overline{\lim}_{r\to\infty} N(r, f^{-1})/V(r) = K$. Имеет место неравенство*

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \ln M(r, f)/V(r) \leqslant K\rho\left\{\frac{\pi}{\sin\pi\rho} - \psi_0(q_0; L/K)\right\}, \tag{16}$$

где $\psi_0(q; Q) = \int\limits_{q\exp(-\tau/\rho)}^{q} (t^\rho - e^{-\tau}q^\rho)\frac{dt}{t(t+1)} + \int\limits_{q}^{q\exp(-\sigma/\rho)} (t^\rho - e^{-\sigma}q^\rho)\frac{dt}{t(t+1)}$,

$0<q<\infty$, $0\leqslant Q\leqslant 1$, $\tau=\tau(Q)$, $\sigma=\sigma(Q)$ *те же, что и раньше*, q_0 — *корень уравнения* $(e^{-\tau} - e^{-\sigma})/(q+1) + \rho\left(e^{-\tau}\ln\frac{q+\exp(\tau/\rho)}{q+1} + \right.$

$\left. + e^{-\sigma}\ln\frac{q+1}{q+\exp(\sigma/\rho)}\right) = 0.$

Существует целая функция f, для которой в (16) имеет место равенство.

Можно показать, что последнее уравнение имеет единственное решение q_0 и функция $\psi_0(q; Q)$ при фиксированном Q, $0<Q<1$, принимает максимум в точке q_0. Легко видеть, что $\psi_0(q; 1) \equiv 0$, $\psi_0(q; 0) \to \pi/\sin(\pi\rho)$ при $q \to +\infty$.

Нужный пример целой функции — функция φ, указанная выше.

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.— 592 с.
2. Хейман У. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.— 288 с.
3. Baernstein A. A nonlinear tauberian theorem in function theory.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **146**, p. 87—104.
4. Гольдберг А. А. О целых функциях без конечных валироновских дефектных значений.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, вып. 15, с. 244—254.
5. Привалов И. И. Субгармонические функции. М.—Л.: Гостехиздат, 1937.— 200 с.
6. Кондратюк А. А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями.— Лит. мат. сб., 1967, **7**, № 1, с. 79—117.
7. Baernstein A. Proof of Edrei's spread conjecture.— Proc. London Math. Soc., 1973, **26** (3), p. 418—434.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию 30.05.1980 г.
после переработки — 20.II.1980 г.