УДК 517.432

А. В. Кужель, Л. И. Руденко

Правильные расширения эрмитовых и изометрических операторов

В настоящей заметке формулы Неймана для симметрических расширений A симметрического оператора A обобщаются на случай правильных расширений (п. 1) эрмитова* оператора A (теорема 3).

---

* В дальнейшем оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется эрмитовым, если $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых f и g из $\mathfrak{D}(A)$. Эрмитов оператор A называется симметрическим, если он плотно определен.

Напомним, что формулы Неймана первоначально установлены для случая, когда A — симметрический (плотно заданный) оператор. Затем в известной работе [1] М. А. Красносельский освободился от требования плотности области определения оператора A. В дальнейшем указанные формулы обобщались на различные классы несамосопряженных (квазиэрмитовых) расширений эрмитовых операторов (см. [2]). Теорема 3 и др. утверждения этой работы — естественное обобщение указанных результатов.

1. Правильные расширения эрмитовых операторов. Пусть B — линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Многообразие

$$G_B = \{f \in \mathfrak{D}(B) \mid (Bf, g) = (f, Bg)\ \forall g \in \mathfrak{D}(B)\}$$

называется областью эрмитовости оператора B, а оператор $B_0 = B|_{G_B}$ — эрмитовой частью оператора B. Оператор B называется правильным расширением эрмитова оператора A, если $A \subset B_0$. Совокупность всех правильных расширений замкнутого эрмитова оператора A будем обозначать через $\mathcal{P}(A)$. В частности, произвольный оператор B является правильным расширением своей эрмитовой части B_0.

Отметим, что если оператор B^* существует и оператор B замкнут, то $B \subset \mathcal{P}(A)$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $A \subset B^*$. Это вытекает из того, что в таком случае $G_B = G_{B^*}$. Следовательно, самосопряженные расширения эрмитова оператора A (если они существуют), а также квазиэрмитовы расширения [2] оператора A содержатся в $\mathcal{P}(A)$.

Пусть $B \subset \mathcal{P}(A)$ и $\mathfrak{N}_B(\lambda) = \Delta_B(\lambda) \ominus \Delta_A(\lambda)$, где $\Delta_T(\lambda) = (T - \lambda I)\,\mathfrak{D}(T)$. Ясно, что $\mathfrak{N}_B(\lambda) \subset \mathfrak{N}_\lambda$, где $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектное подпространство оператора A, и если $\lambda \in \rho(B)$, где $\rho(B)$ — множество регулярных точек оператора B, то $\mathfrak{N}_B(\lambda) = \mathfrak{N}_\lambda$.

Пусть $\lambda \overline{\in} \sigma_p(B)$, где $\sigma_p(B)$ — точечный спектр оператора B. Рассмотрим оператор $T_{\mu\lambda} : \Delta_B(\lambda) \to \Delta_B(\mu)$, который определяется так: если $h \in \mathfrak{D}(B)$ и $f = (B - \lambda I) h$, то $T_{\mu\lambda} f = (B - \mu I) h$. В частности, если $\lambda \in \rho(B)$, то $T_{\mu\lambda} = (B - \mu I)(B - \lambda I)^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть* $B \in \mathcal{P}(A)$. *Тогда* $T_{\mu\lambda} : \Delta_B(\lambda) \cap \mathfrak{N}_{\bar{\mu}} \to \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

Доказательство. Пусть $f \in \Delta_B(\lambda) \cap \mathfrak{N}_{\bar{\mu}}$, т. е. $f = (B - \lambda I) h$ ($h \in \in \mathfrak{D}(B)$) и $(f, (A - \bar{\mu} I)\varphi) = 0$ ($\forall \varphi \in \mathfrak{D}(A)$). Тогда при $\varphi \in \mathfrak{D}(A)$

$$\begin{aligned}(T_{\mu\lambda} f, (A - \bar{\lambda} I)\varphi) &= (f + (\lambda - \mu) h, (A - \bar{\lambda} I)\varphi) = \\ &= (\mu - \lambda)(f, \varphi) + (\lambda - \mu)((h, A\varphi) - \lambda(h, \varphi)).\end{aligned} \quad (1)$$

А так как $f = (B - \lambda I) h$ и $(Bh, \varphi) = (h, A\varphi)$ для любого $\varphi \in \mathfrak{D}(A)$, то правая часть равенства (1) равна нулю, что и доказывает теорему.

Пусть $T_\lambda = T_{\bar{\lambda}\lambda}$ — преобразование Кэли оператора B, $f = (B - \lambda I) h$, $g = (B - \lambda I)\psi$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$(T_\lambda f, T_\lambda g) - (f, g) = (\bar{\bar{\lambda}} - \lambda)[(Bh, \psi) - (h, B\psi)], \quad (2)$$

откуда вытекает, что оператор B эрмитовый тогда и только тогда, когда оператор T_λ изометрический; диссипативный тогда и только тогда, когда оператор T_λ (при $\operatorname{Im}\lambda < 0$) или T_λ^{-1} (при $\operatorname{Im}\lambda > 0$) является сжатием *.

2. Правильные расширения изометрического оператора. Многообразие $\mathcal{J}_T = \{f \in \mathfrak{D}(T) \mid (Tf, Tg) = (f, g)\ \forall g \in \mathfrak{D}(T)\}$ называется областью изометричности оператора T, а оператвр $T' = T|_{\mathcal{J}_T}$ — изометрической частью оператора T. Оператор T называется правильным расширением изометрического оператора V, если $V \subset T'$. Совокупность всех правильных расширений замкнутого изометрического оператора V будем обозначать через $\mathcal{P}'(V)$.

---

* Оператор A называется диссипативным, если $\operatorname{Im}(Af, f) \geqslant 0$ ($\forall f \in \mathfrak{D}(A)$), и сжатием, если $\|A\| \leqslant 1$.

Теорема 2. *Оператор* $T\in\mathcal{P}'(V)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(V)\oplus\mathfrak{D}(N) \tag{3}$$

и

$$T(f_1+f_2)=Vf_1+Nf_2 \quad (f_1\in\mathfrak{D}(V),\ f_2\in\mathfrak{D}(N)), \tag{4}$$

где N — *некоторый линейный оператор, действующий из* $\mathfrak{N}=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}(V)$ *в* $\widetilde{\mathfrak{N}}=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{R}(V)$.

Доказательство. Пусть $T\in\mathcal{P}'(V)$ и $f\in\mathfrak{D}(T)$. Тогда, очевидно, вектор f можно представить в виде $f=f_1+f_2$, где $f_1\in\mathfrak{D}(V)$, $f_2\in\mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}(T)$. При этом $Tf=Vf_1+Nf_2$, где $N=T|_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{D}(T)}$. Остается показать, что $\mathfrak{R}(N)\subset\widetilde{\mathfrak{N}}$. Действительно, так как $\mathfrak{D}(V)\subset\mathfrak{I}_T$, то для любого $\varphi\in\mathfrak{D}(V)$ $(Nf_2,V\varphi)=(Tf_2,T\varphi)=(f_2,\varphi)=0$ и, таким образом, $Nf_2\in\widetilde{\mathfrak{N}}$.

Пусть теперь наоборот: V — изометрический оператор, N — некоторый линейный оператор, действующий из $\mathfrak{N}$ в $\widetilde{\mathfrak{N}}$ и оператор T определен на многообразии (3) равенством (4). Тогда для любого $\varphi\in\mathfrak{D}(V)$ и $f=f_1+f_2\in\in\mathfrak{D}(T)$

$$(Tf,T\varphi)=(Vf_1+Nf_2,V\varphi)=(Vf_1,V\varphi)=(f_1,\varphi)=(f,\varphi)$$

и, следовательно, $\varphi\in\mathfrak{I}_T$, т. е. $V\subset T'$, что и доказывает теорему.

Пусть B — правильное расширение эрмитова оператора A, $\bar\lambda\,\overline{\in}\,\sigma_p(B)$, и T, V — преобразования Кэли соответственно операторов B и A.

Используя равенство (2), приходим к заключению, что в таком случае оператор T — правильное расширение изометрического оператора V. При этом оператор $B-\lambda I$ биективно отображает область эрмитовости оператора B на область изометричности оператора T и $1\,\overline{\in}\,\sigma_p(T)$.

Наоборот, если T — правильное расширение изометрического оператора V и $1\,\overline{\in}\,\sigma_p(T)$, то оператор B, определяемый равенством

$$Bf=\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}(\lambda T-\bar\lambda I)h \quad \left(f=\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}(T-I)h\right), \tag{5}$$

— правильное расширение эрмитова оператора A, который определяется так:

$$A\varphi=\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}(\lambda V-\bar\lambda I)g \quad \left(\varphi=\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}(V-I)g\right). \tag{6}$$

При этом операторы T и V являются преобразованиями Кэли (в точке λ) соответственно операторов B и A.

Пусть A — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$, V — преобразование Кэли оператора A и N — произвольный линейный оператор, действующий из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Тогда оператор T, определенный на многообразии (3) равенством (4),—правильное расширение изометрического оператора V. Назовем оператор N допустимым, если $1\,\overline{\in}\,\sigma_p(T)$. В таком случае оператор B, определенный равенством (5),— правильное расширение эрмитова оператора A. При этом, как легко проверить,

$$(Bf,\varphi)-(f,B\varphi)=\frac{1}{\bar\lambda-\lambda}[(Nh_2,Ng_2)-(h_2,g_2)],$$

где h_2 и g_2 — проекции соответствующих векторов h и g (см.(5) и (6)) на $\mathfrak{N}_\lambda$. Следовательно, оператор B эрмитов тогда и только тогда, когда оператор N изометрический; диссипативный тогда и только тогда, когда N — сжатие (при $\operatorname{Im}\lambda<0$).

3. Описание правильных расширений эрмитова оператора.

Теорема 3. *Пусть $B \in \mathfrak{P}(A)$, $\lambda \bar{\in} \sigma_p(B)$ и $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Тогда произвольный вектор f из $\mathfrak{D}(B)$ представим в виде*

$$f = \varphi + g_\lambda + \Phi g_\lambda, \tag{7}$$

где $\varphi \in \mathfrak{D}(A)$, $g_\lambda \in \mathfrak{D}(\Phi)$, а Φ — некоторый линейный оператор, действующий из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ и такой, что $-1 \bar{\in} \sigma_p(\Phi)$. При этом оператор B действует по формуле:

$$B(\varphi + g_\lambda + \Phi g_\lambda) = A\varphi + \bar{\lambda} g_\lambda + \lambda \Phi g_\lambda, \tag{8}$$

и, кроме того, многообразия $\mathfrak{D}(A)$ и $(\Phi + I)\mathfrak{D}(\Phi)$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть B — правильное расширение оператора A, а T и V — преобразования Кэли (в точке λ; $\lambda \bar{\in} \sigma_p(B)$) операторов B и A соответственно. На основании предыдущего $T \in \mathfrak{P}'(V)$, и, следовательно, в силу теоремы 2 оператор T представим в виде (4). При этом операторы B и A связаны с T и V равенствами (5) и (6), причем $\mathfrak{D}(V) = \Delta_A(\lambda)$, $\mathfrak{R}(V) = \Delta_A(\bar{\lambda})$. Следовательно, если $f \in \mathfrak{D}(B)$, то $f = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(Th - h)$, где $Th = Vh_1 + Nh_2$ $(h_1 \in \mathfrak{D}(V)$, $h \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(V) = \mathfrak{N}_\lambda$; оператор N действует из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}(V) = \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ и $1 \bar{\in} \sigma_p(N))$. Но тогда $f = \varphi + g_\lambda + \Phi g_\lambda$, где

$$\varphi = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(V - I) h_1 \in \mathfrak{D}(A), \quad g_\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} h_2 \in \mathfrak{N}_\lambda, \tag{9}$$

$\Phi = -N$ и, следовательно, Φ действует из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ и $-1 \bar{\in} \sigma_p(\Phi)$.

Таким образом, вектор f из $\mathfrak{D}(B)$ представим в виде (7). При этом, используя (5), (7) и (9), приходим к равенству (8).

Остается показать, что многообразия $\mathfrak{D}(A)$ и $(\Phi + I)\mathfrak{D}(\Phi)$ линейно независимы. Действительно, предположим, что $\varphi \neq 0$, $g_\lambda \neq 0$ и

$$\alpha\varphi + \beta(\Phi + I) g_\lambda = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{D}(A),\ g_\lambda \in \mathfrak{D}(\Phi)) \tag{10}$$

Применяя к обеим частям равенства (10) оператор B, получим, что

$$\alpha A\varphi + \beta(\lambda \Phi g_\lambda + \bar{\lambda} g_\lambda) = 0. \tag{11}$$

Но тогда на основании (10) и (11)

$$\alpha(A - \lambda I)\varphi + \beta(\bar{\lambda} - \lambda) g_\lambda = 0.$$

Откуда вытекает, что $\alpha = \beta = 0$ (так как $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $(A - \lambda I)\varphi \in \Delta_A(\lambda)$ и $g_\lambda \perp \Delta_A(\lambda)$). Теорема доказана.

Теорема 4. *Если произвольный вектор f из $\mathfrak{D}(B)$ представим в виде (7) и оператор B действует по формуле (8), где Φ — некоторый линейный оператор, действующий из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ и такой, что $-1 \bar{\in} \sigma_p(\Phi)$ и многообразия $\mathfrak{D}(A)$ и $(\Phi + I)\mathfrak{D}(\Phi)$ линейно независимы, то $B \in \mathfrak{P}(A)$, $\lambda \bar{\in} \sigma_p(B)$ и*

$$\bar{\lambda} \in \sigma_p(B) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(\Phi). \tag{12}$$

Доказательство. Покажем, что из $f = \varphi + g_\lambda + \Phi g_\lambda = 0$ следует $Bf = 0$. Действительно, так как векторы φ и $(I + \Phi) g_\lambda$ линейно независимы, то $\varphi = g_\lambda = 0$ (последнее в силу того, что $-1 \bar{\in} \sigma_p(\Phi)$). Следовательно, $Bf = 0$. Но тогда для любого $\psi \in \mathfrak{D}(A)$ $B\psi = A\psi$ и, как легко проверить, при $f \in \mathfrak{D}(B)$ $(Bf, \psi) - (f, B\psi) = -(g_\lambda, (A - \lambda I)\psi) - (\Phi g_\lambda, (A - \bar{\lambda} I)\psi) = 0$. А это означает, что $\psi \in G_B$ и, таким образом, $A \subset B_0$, т. е. $B \in \mathfrak{P}(A)$.

Предположим, что $Bf = \lambda f$, где $f = \psi + g_\lambda + \Phi g_\lambda$. Тогда $A\varphi + \bar{\lambda} g_\lambda = \lambda\varphi + \lambda g_\lambda$ или $(A - \lambda I)\varphi = (\lambda - \bar{\lambda}) g_\lambda$. А так как векторы $(A - \lambda I)\varphi$ и g_λ ортогональны, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и оператор A эрмитов, то приходим к заключению, что $\varphi = g_\lambda = 0$. Но тогда $f = 0$ и, следовательно, $\lambda \bar{\in} \sigma_p(B)$.

Точно так же устанавливаем, что если $Bf = \bar{\lambda} f$, $(f \neq 0)$, то $(A - \bar{\lambda} I)\varphi = (\bar{\lambda} - \lambda)\Phi g_\lambda$, откуда $\varphi = \Phi g_\lambda = 0$. При этом $g_\lambda \neq 0$ (т. к. $f \neq 0$) и, следовательно, $0 \in \sigma_p(\Phi)$. Аналогично, если $\Phi g_\lambda = 0$ $(g_\lambda \neq 0)$, то $Bg_\lambda = \bar{\lambda} g_\lambda$, что и доказывает (12).

4. Квазисопряженные и сопряженные расширения. Оператор $\tilde{B} \in \mathcal{P}(A)$ квазисопряженный цо отношению к оператору $B \in \mathcal{P}(A)$, если

$$(Bf, g) = (f, \tilde{B}g) \quad (\forall f \in \mathfrak{D}(B),\ \forall g \in \mathfrak{D}(\tilde{B})). \tag{13}$$

Если при этом $\lambda \bar{\in} \sigma_p(B)$ и $\lambda \bar{\in} \sigma_p(\tilde{B})$ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$, то векторы f и Bf представимы соответственно в виде (7) и (8), а векторы g и $\tilde{B}g$ — в аналогичном виде:

$$g = \psi + \tilde{g}_\lambda + \tilde{\Phi}\tilde{g}_\lambda,\ \tilde{B}g = A\psi + \bar{\lambda}\tilde{g}_\lambda + \lambda\tilde{\Phi}\tilde{g}_\lambda, \tag{14}$$

где $\psi \in \mathfrak{D}(A)$, $\tilde{g}_\lambda \in \mathfrak{D}(\tilde{\Phi})$ и свойства оператора $\tilde{\Phi}$ определяются теоремой 3. В таком случае, как нетрудно проверить, равенство (13) выполняется тогда и только тогда, когда для произвольных векторов g_λ и $\tilde{g}_\lambda$ из $\mathfrak{D}(\Phi)$ и $\mathfrak{D}(\tilde{\Phi})$ соответственно

$$(\Phi g_\lambda, \tilde{\Phi}\tilde{g}_\lambda) = (g_\lambda, g_{\bar{\lambda}}). \tag{15}$$

В частности, если $\bar{\lambda} \bar{\in} \sigma_p(\tilde{B})$ то (теорема 4) $0 \bar{\in} \sigma_p(\tilde{\Phi})$. В таком случае равенства (14) и (15) можно переписать так:

$$g = \psi + g_{\bar{\lambda}} + \tilde{\Phi}^{-1} g_{\bar{\lambda}},\ \tilde{B}g = A\psi + \lambda g_{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda}\tilde{\Phi}^{-1} g_{\bar{\lambda}}, \tag{16}$$

$$(\Phi g_\lambda, g_{\bar{\lambda}}) = (g_\lambda, \tilde{\Phi}^{-1} g_{\bar{\lambda}}),\ (g_{\bar{\lambda}} \in \mathfrak{D}(\tilde{\Phi}^{-1}) \subset \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}). \tag{17}$$

На основании предыдущего приходим к заключению, что если оператор B плотно определен, замкнут и $\lambda \bar{\in} \sigma_p(B^*)$, то оператор B^* определяется соотношениями (14), где оператор $\tilde{\Phi}$ связан с оператором Φ условием (15). Если при этом $\bar{\lambda} \bar{\in} \sigma_p(B^*)$ (что, в частности, имеет место в случае расширений B, для которых $\lambda \in \rho(B)$), то $\tilde{\Phi}^{-1} = \Phi^*$ и, таким образом,

$$g = \psi + g_{\bar{\lambda}} + \Phi^* g_{\bar{\lambda}},\ B^*g = A\psi + \lambda g_{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda}\Phi^* g_{\bar{\lambda}}.$$

1. Красносельский М. А. О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов.— Укр. мат. журн., 1949, № 1, с. 21—38.
2. Цекановский Э. Р., Шмульян Ю. Л. Вопросы теории расширения неограниченных операторов в оснащенных гильбертовых пространствах.— В сб. «Математический анализ» (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР), т. 14, М.; 1977, 59—100.

Симферопольский
государственный университет

Поступила в редакцию 22.04.1980 г.:
После переработки — 9.04.1981 г.