УДК 517.917

И. П. Момот

Асимптотическая устойчивость состояний равновесия одной динамической системы

В теории нелинейных колебаний часто встречается [1, 2, 3] система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left(\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^2\right) \equiv R_i(x) \quad (i=\overline{1, n}), \tag{1}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$; α_i и $a_{ij}\,(i, j=\overline{1, n})$ — действительные числа.

Множества $x_i = 0$ $(i=\overline{1,n})$ — инвариантные множества системы уравнений (1) и векторное поле этой системы симметрично относительно этих множеств. Поэтому ограничимся областью $x \geqslant 0$. В конечной части этой области система уравнений (1) может иметь 2^n состояний равновесия, которые находятся из системы уравнений

$$x_i\left(\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^2\right) = 0 \quad (i=\overline{1, n}). \tag{2}$$

Условия асимптотической устойчивости этих состояний равновесия указаны в работах [2, 3], однако, подсчитать их количество, пользуясь этими условиями, трудно [3]. В настоящей работе предлагается алгоритм исследования состояний равновесия системы уравнений (1) на асимптотическую устойчивость.

Характер устойчивости точек равновесия системы уравнений (1) определяет матрица $H=(\partial R_i(x)/\partial x_j)_n$ с элементами

$$h_{ij} = 2a_{ij}x_ix_j + \delta_{ij}\left(\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^2\right) \quad (i, j=\overline{1, n}), \tag{3}$$

где h_{ij} — символ Кронекера, и характеристическим уравнением

$$\det(H-\lambda E)=0. \tag{4}$$

Пусть $g_\rho=(i_1, \ldots, i_\rho;\ j_1, \ldots, j_{n-\rho})$ — некоторая перестановка чисел 1, ..., n, удовлетворяющих условиям $i_1<i_2<\ldots<i_\rho$; $j_1<j_2<\ldots<j_{n-\rho}$ $(0\leqslant\rho\leqslant n)$.

Точкой равновесия уровня $\rho\,(0\leqslant\rho\leqslant n)$ системы уравнений (1) назовем точку $x_0=(x_{10}, \ldots, x_{n0})$, для координат которой выполняются соотношения

$$x_{j0}>0\ (j=\overline{i_1, i_\rho}),\ x_{j0}=0\ (j=\overline{j_1, j_{n-\rho}}). \tag{5}$$

Рассмотрим сначала точку x_0 уровня n. Для координат $x_{j0}>0$ $(j=\overline{1, n})$ ее из уравнений (2) получаем

$$\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^2 = 0 \quad (i=\overline{1, n}). \tag{6}$$

Следовательно, если $A=(a_{ij})_n$, $\det A=\Delta\neq 0$ и выполняются неравенства

$$\Delta\Delta_j>0 \quad (j=\overline{1, n}), \tag{7}$$

где $\Delta_j\,(j=\overline{1, n})$ — определитель матрицы A_j, полученной из A заменой j-го столбца числами $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$, то состояние равновесия x_0 существует и для координат его справедливы равенства

$$x_{j0}^2 = \Delta_j/\Delta \quad (j = \overline{1, n}). \tag{8}$$

В системе уравнений (1) выполним замену переменных по формулам

$$2t = \xi, \quad x_i^2 = x_{i0}^2 e^{u_i} \quad (i = \overline{1, n}). \tag{9}$$

В переменных $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и ξ система уравнений (1) принимает вид

$$\frac{du_i}{d\xi} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(e^{u_j} - 1) \quad (i = \overline{1, n}), \tag{10}$$

где

$$p_{ij} = a_{ij} x_{j0}^2 \quad (i, j = \overline{1, n}). \tag{11}$$

В области $x > 0$ замена переменных (9) регулярна. Преобразование (9) переводит область $x > 0$ во всю конечную часть пространства переменных u. Точка x_0 переходит в начало координат $u_0 = 0$.

Характер устойчивости точки равновесия u_0 определяет матрица $P = (p_{ij})_n$, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\det(\lambda E - P) \equiv \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k s_k \lambda^{n-k} = 0, \tag{12}$$

где s_k — сумма главных миноров k-го порядка матрицы P.

Числа s_k можно выразить через главные миноры матрицы A. Действительно, пусть G_k — множество всех перестановок g_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, а $M_{j_1, \ldots, j_{n-k}}$ — минор k-го порядка матрицы A, полученный из нее вычеркиванием строк и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_{n-k}$. Тогда учитывая формулы (11), для чисел s_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ получим

$$s_k = \sum_{g_k \in G_k} x_{i_1 0}^2 \ldots x_{i_k 0}^2 M_{j_1, \ldots, j_{n-k}} \quad (k = \overline{1, n}). \tag{13}$$

Составим определители

$$D_1 = -s_1, \ \ldots, \ D_n = \begin{vmatrix} -s_1 & s_0 & 0 & \ldots & 0 \\ -s_3 & s_2 & -s_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -s_{2n-1} & s_{2n-2} & -s_{2n-3} & \ldots & (-1)^n s_n \end{vmatrix} = (-1)^n s_n D_{n-1}, \tag{14}$$

где $s_0 = 1$ и $s_k = 0$ при $k > n$.

Согласно критерию Гурвица, для того чтобы все корни характеристического уравнения (12) имели отрицательные вещественные части необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства

$$D_i > 0 \quad (i = \overline{1, n}). \tag{15}$$

В этом случае состояние равновесия $u_0 = 0$ системы уравнений (10) [а значит и состояние равновесия x_0 системы уравнений (1)] асимптотически устойчиво.

Из равенства $D_n = (-1)^n s_n D_{n-1}$ и неравенств (15) следует неравенство

$$(-1)^n s_n > 0. \tag{16}$$

Поскольку же из формул (13) получаем $s_n = \Delta \cdot \prod_{j=1}^{n} x_{j0}^2$, то из неравенства

(16) следует неравенство

$$(-1)^n \Delta > 0. \tag{17}$$

Таким образом, для асимптотической устойчивости точки равновесия x_0 уровня n системы уравнений (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (17) и $n-1$ неравенств $D_i > 0$ $(i = \overline{1, n-1})$.

Вообще, рассмотрим точку равновесия $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ уровня ρ $(0 \leqslant \rho \leqslant n)$ системы уравнений (1). Из системы уравнений (2) для ненулевых координат точки x_0 получим равенства

$$\alpha_i + \sum_{j=i_1}^{i_\rho} a_{ij} x_{j0}^2 = 0 \quad (i = \overline{i_1, i_\rho}). \tag{18}$$

Главным определителем системы уравнений (18) является минор $M_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}}$ матрицы A. Пусть $M^{(j)}_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}}$ — тот же минор матрицы A_j. Если $M_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}} \neq 0$ и выполняются неравенства

$$M_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}} \cdot M^{(j)}_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}} > 0 \quad (j = \overline{j_1, j_{n-\rho}}), \tag{19}$$

то состояние равновесия x_0 существует и для ненулевых координат его справедливы равенства

$$x_{j0}^2 = M^{(j)}_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}} / M_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}} \quad (j = \overline{j_1, j_{n-\rho}}). \tag{20}$$

В этом случае будем говорить, что точка x_0 соответствует минору $M_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}}$ и наоборот.

Все элементы строк и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_{n-\rho}$ матрицы H, вычисленные по формулам (3) в точке x_0, кроме диагональных h_{jj}, равны нулю. Поэтому $n-\rho$ корней характеристического уравнения (4) для точки x_0 легко вычислить:

$$\lambda_j = h_{jj} = \alpha_j + \sum_{k=i_1}^{i_\rho} a_{jk} x_{k0}^2 = -\frac{M^{(j)}_{j_1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, j_{n-\rho}}}{M_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}}} \; (j = \overline{j_1, j_{n-\rho}}), \tag{21}$$

где в числителе минор порядка $\rho + 1$ матрицы A_j, полученный из нее вычеркиванием строк и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_{n-\rho}$ кроме j-ой строки и j-го столбца $(j = \overline{j_1, j_{n-\rho}})$.

Остальные корни λ_i $(i = \overline{i_1, i_\rho})$ характеристического уравнения (4) находятся как корни уравнения $\det(\overline{H} - \lambda E) = 0$, где $\overline{H}$ — матрица, полученная из H вычеркиванием строк и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_{n-\rho}$, т. е. матрица Якоби ρ-мерной системы уравнений вида (1):

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(\alpha_i + \sum_{j=i_1}^{i_\rho} a_{ij} x_j^2 \right) \quad (i = \overline{i_1, i_\rho}). \tag{22}$$

В ρ-мерном пространстве переменных x_i $(i = \overline{i_1, i_\rho})$ система уравнений (22) может иметь единственную точку равновесия $(x_{i_1 0}, \ldots, x_{i_\rho 0})$, все координаты которой положительны и удовлетворяют равенствам (18). При выполнении условий (19) эта точка существует и координаты ее можно вычислить по формулам (20). Матрица коэффициентов $\overline{A} = (a_{ij})_\rho$ системы уравнений (22) может быть получена из матрицы A вычеркиванием строк и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_{n-\rho}$. Поэтому $\det \overline{A} = M_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}}$. Выше доказано, что для асимптотической устойчивости точки равновесия $(x_{i_1 0}, \ldots, x_{i_\rho 0})$

системы уравнений (22) необходимо и достаточно чтобы выполнялось неравенство

$$(-1)^{\rho} M_{j_1,\ldots,j_{n-\rho}} > 0 \tag{23}$$

и $\rho - 1$ неравенств $\overline{D}_i > 0$ $(i = \overline{i_1, i_{\rho-1}})$, где числа $\overline{D}_i$ $(i = \overline{i_1, i_{\rho-1}})$ вычисляются по формулам (13) и (14), в которых следует n заменить на ρ. Последние $\rho - 1$ неравенств $\overline{D}_i > 0$ $(i = \overline{i_1, i_{\rho-1}})$ можно заменить неравенствами $D_i > 0$ $(i = \overline{i_1, i_{\rho-1}})$, поскольку по виду формул (13) легко установить, что $\overline{D}_i = D_i$ $(i = \overline{i_1, i_{\rho-1}})$

Для асимптотической устойчивости точки x_0 системы уравнений (1) необходимо и достаточно, чтобы кроме этого были отрицательны корни λ_j $(j = \overline{j_1, j_{n-\rho}})$, вычисляемые по формулам (21), т. е. чтобы выполнялись [при учете неравенства (23)] неравенства

$$(-1)^{\rho} M^{(j)}_{j_1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,j_{n-\rho}} > 0 \quad (j = \overline{j_1, j_{n-\rho}}). \tag{24}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы точка равновесия $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$, где $x_{j0} > 0$ при $j = \overline{i_1, i_\rho}$* и *$x_{j0} = 0$ при $j = \overline{j_1, j_{n-\rho}}$, уровня ρ $(0 \leqslant \rho \leqslant n)$ системы уравнений* (1) *была асимптотически устойчивой необходимо и достаточно, чтобы выполнялись n неравенств: неравенство*

$$(-1)^{\rho} M_{j_1,\ldots,j_{n-\rho}} > 0, \tag{25}$$

$\rho - 1$ *неравенств*

$$D_i > 0 \ \ (i = \overline{i_1, i_{\rho-1}}) \tag{26}$$

и $n - \rho$ неравенств

$$(-1)^{\rho} M^{(j)}_{j_1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,j_{n-\rho}} > 0 \quad (j = \overline{j_1, j_{n-\rho}}), \tag{27}$$

где $M_{j_1,\ldots,j_{n-\rho}}$ — минор порядка ρ матрицы $A = (a_{ij})_n$, полученный из нее вычеркиванием строк и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_{n-\rho}$; $M^{(j)}_{j_1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,j_{n-\rho}}$ — минор порядка $\rho + 1$ матрицы A_j, полученной из A заменой j-го столбца числами $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$, в которой вычеркнуты те же строки и столбцы кроме j-ой строки и j-го столбца $(j = \overline{j_1, j_{n-\rho}})$, и числа D_i $(i = \overline{i_1, i_{\rho-1}})$ вычисляются по формулам (13) *и* (14).

Условие (25) будем называть условием уровня, (26) — внутренними и (27) — внешними условиями асимптотической устойчивости состояния равновесия x_0 системы уравнений (1).

Замечание. Если точки $(\rho + 1)$-го уровня, отвечающие минорам $M_{j_1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,j_{n-\rho}}$ $(j = \overline{j_1, j_{n-\rho}})$ присутствуют в конечной части пространства $x > 0$, то внешние условия (27) в теореме можно заменить (при учете неравенств вида (19)) условиями выполнения неравенств

$$(-1)^{\rho} M_{j_1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,j_{n-\rho}} > 0 \quad (j = \overline{j_1, j_{n-\rho}}). \tag{28}$$

Следствие 1. *Если система уравнений* (1) *такова, что все $a_{jj} \geqslant 0$ $(j = \overline{1, n})$, то она не имеет асимптотически устойчивых состояний равновесия ненулевого уровня.*

Доказательство. Пусть $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ — точка равновесия ненулевого уровня ρ системы уравнений (1). При $\rho = 1$ для точки x_0 не выполняется условие уровня (25), поскольку $(-1)^1 a_{jj} = -a_{jj} \leqslant 0$ $(j = \overline{1, n})$. При $2 \leqslant \rho \leqslant n$ для точки x_0 не выполняются внутренние условия (26), поскольку [см. формулы (13) и (14)] $D_1 = -s_1 = -\sum_{j=1}^{n} x_{j0}^2 a_{jj} \leqslant 0$. Во всех случаях точка x_0 не удовлетворяет условиям теоремы и не может быть асимптотически устойчивой.

Следствие 2. *Если точка равновесия $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ уровня ρ $(0 \leqslant \rho \leqslant n)$ системы уравнений* (1) *асимптотически устойчива, то ни одна из ρ точек равновесия* $(\rho - 1)$*-го уровня этой системы, у которых нулевыми есть те же координаты, что и у точки x_0, и ни одна из $n - \rho$ точек равновесия* $(\rho + 1)$-го *уровня, у которых ненулевыми есть те же координаты, что и у точки x_0, асимптотически устойчивой быть не может*

Доказательство. Пусть $x_{j0} > 0$ при $j = \overline{i_1, i_\rho}$ и $x_{j0} = 0$ при $j = \overline{j_1, j_{n-\rho}}$. По условию выполняется неравенство (25), а для асимптотической устойчивости каждой из ρ точек $(\rho - 1)$-го уровня, у которых нулевыми есть те же координаты, что и у точки x_0, необходимо, чтобы выполнялось неравенство вида (28) $(-1)^{\rho-1} M_{j_1, \ldots, j_{n-\rho}} > 0$, несовместное с неравенством (25). Это доказывает первую часть следствия 2.

Далее, пусть точка $(\rho + 1)$-го уровня, отвечающая минору $M_{j_1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, j_{n-\rho}}$ $(j_1 \leqslant j \leqslant j_{n-\rho})$, присутствует в конечной части пространства $x \geqslant 0$. Тогда по условию выполняется соответственное неравенство из (28)

$$(-1)^{\rho} M_{j_1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, j_{n-\rho}} > 0 \quad (j_1 \leqslant j \leqslant j_{n-\rho}). \tag{29}$$

А для асимптотической устойчивости этой точки, как следует из теоремы, необходимо чтобы выполнялось условие уровня $(-1)^{\rho+1} M_{j_1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, j_{n-\rho}} > 0$ $(j_1 \leqslant j \leqslant j_{n-\rho})$, несовместное с неравенством (29).

Доказанные утверждения дают возможность установить амимптотическую устойчивость состояний равновесия системы уравнений (1). Для этого следует: 1) вычислить главные миноры матрицы A и выделить те из них, которые удовлетворяют условие уровня (25); 2) проверить выполнение условий внешней устойчивости (27) [или (28)]; 3) вычислить по формулам (20) $x_{j0}^2 > 0$ $(j - \overline{i_1, i\rho})$, по формулам (13) и (14) $D_i (i = \overline{i, i_{\rho-1}})$ и проверить выполнение условий внутренней устойчивости (26). На каждом уровне при этом проверяются условия следствия 1 и учитывается следствие 2, что дает возможность пункты 2) и 3) выполнять не для всех выделенных в пункте 1) миноров.

Например, для системы уравнений

$$x_1' = x_1(-12 + 12x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2), \quad x_2' = x_2(24 + 8x_1^2 - 12x_2^2 + $$
$$+ x_3^2 + 3x_4^2), \quad x_3' = x_3(15 + 4x_1^2 + 4x_2^2 - 5x_3^2 + x_4^2), \quad x_4' = x_4(-16 - 5x_1^2 -$$
$$- 4x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_4^2) \tag{30}$$

условие уровня (25) удовлетворяют шесть миноров $M_2 = -98$, $M_3 = -246$, $M_{14} = 56$, $M_{23} = 43$, $M_{124} = -5$ и $M_{134} = -12$.

Для точек, отвечающих минорам M_2 и M_3, не выполняются внешние условия (27). Для точки B_{14} $(0, \sqrt{135/56}, \sqrt{69/14}, 0)$, отвечающей минору M_{14}, внешние условия (27) выполняются, $s_1 = M_{124} x_3^2 + M_{134} x_2^2 = -\dfrac{375}{7}$ и $D_1 = -s_1 = \dfrac{375}{7} > 0$. Точка B_{14} асимптотически устойчива. Точка, отвечающая минору M_{23}, не является асимптотически устойчивой согласно утверждению следствия 1. Поскольку точка B_{14} асимптотически устойчива, то точки, отвечающие минорам M_{124} и M_{134}, не могут быть асимптотически устойчивыми (см. следствие 2).

Наконец, поскольку $\alpha_1, \alpha_3 > 0$, то точка O нулевого уровня не является асимптотически устойчивой.

Таким образом, система уравнений (30) имеет единственную асимптотически устойчивую точку B_{14}.

1. Лемб У. Теория оптических мазеров. В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика, М.: Мир, 1966, с. 282.
2. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Исследование колебательных систем второго порядка. Киев, 1976, 50 . (Препринт Ин-та математики АН УССР).
3. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Некоторые вопросы теории многочастотных колебаний. Киев, 1977, 48 с. (Препринт Ин-та математики АН УССР).

Хмельницкий технологический институт
бытового обслуживания

Поступила в редакцию 2.04.1980 г.
после переработки — 24.09.1980 г.