УДК 517.9

Ф. У. Носиров

К вопросу о влиянии запаздывания в уравнениях с гироскопическими членами

В некоторых важных случаях колебания системы характеризуются лагранжевой функцией [1] вида

$$L = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\tau)\dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t) + 2\sum_{i,j=1}^{N} g_{ij}(r)\dot{q}(t)q_j(t) - \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}(\tau)q_i(t)q_j(t) + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{i,j=1}^{N}\bar{g}_{ij}(\tau)\dot{q}_i(t)\, q_j(t-\gamma(\tau)) - \sum_{i,j=1}^{N}\bar{b}_{ij}q_i(t)q_j(t-\gamma(\tau))\right\}, \qquad (1)$$

содержащей элемент запаздывания.

Предполагая, что на систему воздействует также внешние возмущающие силы, получаем систему

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\tau)\dot{q}_j(t)\right\} + \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}(\tau)\dot{q}_j(t) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}(\tau)q_j(t) + \sum_{i,j=1}^{N}\bar{c}_{ij}(\tau)\dot{q}_j(t -$$
$$- \gamma(\tau)) + \sum_{i,j=1}^{N}\bar{b}_{ij}(\tau)q_j(t-\gamma(\tau)) = \varepsilon\left\{Q_j(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N, q_1(t-\gamma_1(\tau)), \ldots\right.$$
$$\ldots, g_N(t-\gamma_1(\tau)), \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_1(t-\gamma_1(\tau))\ldots) - \sum_{i,j=1}^{N}\frac{dg_{ij}(r)}{d\tau}q_j(t) -$$
$$\left. - \sum_{i,j=1}^{N}\frac{d\bar{g}_{ij}(\tau)}{d\tau}q_j(t-\gamma(\tau))\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, N), \qquad (2)$$

где q_j — обобщенные координаты, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, $\gamma(\tau)$, $\gamma_1(\tau)$ — функции, характеризующие запаздывание, неотрицательные и принимают только значения, лежащие в некоторой малой окрестности точек $\gamma(\tau_0)$, $\gamma_1(\tau_0)$ для всех $0 \leqslant \tau \leqslant L$, а функции Q_j, $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = g_{ij} - g_{ji}$, $\bar{b}_{ij} = \bar{b}_{ji}$, $\bar{c}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \bar{g}_{ji}$ имеют достаточное число производных по τ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Наряду с системой (2) рассмотрим порождающую систему, в которой τ будем считать фиксированным. Характер решений порождающей системы определяется характером расположения корней характеристического уравнения

$$D(\omega) = D\,\|-a_{ij}\omega^2 + ic_{ij}\omega + b_{ij} + e^{-i\omega\gamma}(i\bar{c}_{ij}\omega + \bar{b}_{ij})\| = 0. \qquad (3)$$

Предположим, что уравнение (3) не имеет корней с положительной вещественной частью и кратных корней на мнимой оси и что при некотором фиксированном $\tau = \tau_0$ уравнение (3) имеет пару простых чисто мнимых корней $\omega = \pm i\omega_k$

При этих предположениях относительно корней характеристического уравнения (3) порождающая система имеет двупараметрическое семейство периодических решений

$$q_j^{(k)} = a_k\varphi_j^{(k)}e^{i(\omega_k t + \varphi_k)} + a_k\dot{\varphi}_j^{(k)}e^{-i(\omega_k t + \varphi_k)}, \qquad (4)$$

где $\varphi_j^{(k)}$ — фундаментальные функции, являющиеся нетривиальными решениями системы:

$$\sum_{j=1}^{N} \{-a_{ij}\omega_k^2 + ic_{ij}\omega_k + b_{ij} + (\bar{b}_{ij} + i\bar{c}_{ij}\omega_k)\, e^{-i\omega_k\gamma}\}\, \varphi_j^{(k)} = 0, \tag{5}$$

а функции $\overset{*}{\varphi}{}_j^{(k)}$ сопряжены с $\varphi_j^{(k)}$.

При сделанных допущениях к системе (2) применим асимптотический метод построения приближенных решений, являющихся обобщением известного асимптотического одночастотного метода Боголюбова — Митропольского [1].

Построим асимптотические приближенные формулы для частного решения системы (2), соответствующего одночастотным колебаниям, близким к колебанию с частотой ω_1.

Решение системы (2) ищем в виде асимптотических рядов

$$q_j = u_j^{(0)}(\tau, a, p\varphi + \psi) + \varepsilon u_j^{(1)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) + \varepsilon^2 u_j^{(2)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) + \dots, \tag{6}$$

в которых $u_j^{(l)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi)$ — функции, периодические по θ и $p\varphi + \psi$ с периодом 2π а величины a и ψ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi) + \dots . \end{aligned} \tag{7}$$

После обычных операций [2] для определения неизвестных нам функций получаем следующие системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N} \Big\{ a_{ij}(\tau) \frac{d^2u_j^{(1)}}{dt^2} + c_{ij}(\tau) \frac{du_j^{(1)}}{dt} + \bar{c}_{ij}(\tau) \frac{du_j^{(1)}(\gamma)}{dt} + b_{ij}(\tau)\, u_j^{(1)} + \bar{b}_{ij}(\tau)\, u_j^{(1)}(\gamma) \Big\} = G_{i0}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi), \tag{8}$$

где

$$G_{i0}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) = Q_{i0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \rho\varphi + \psi) - \sum_{i,j=1}^{N} \Big\{ a_{ij}(\tau) \Big[\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\Big(\omega_1 - \frac{p}{q}\nu\Big) \times$$

$$\times \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial a} + 2\omega_1 B_1 \frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial(\rho\varphi + \psi)^2} + \Big(\omega_1 - \frac{p}{q}\nu\Big) \frac{\partial B_1}{\partial\psi} \cdot \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial(p\varphi + \psi)} +$$

$$+ 2\omega_1 A_1 \frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial a\, \partial(p\varphi + \psi)} + 2\frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial\tau\, \partial(p\varphi + \psi)}\omega_1 + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial(p\varphi + \psi)} \frac{d\omega_1}{d\tau} \Big] +$$

$$+ c_{ij}(\tau) \Big[A_1 \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial(p\varphi + \psi)} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial\tau} \Big] + \bar{c}_{ij}(\tau) \Big[\frac{\partial u_j^{(0)}(\gamma)}{\partial\tau} +$$

$$+ \frac{\partial u_j^{(0)}(\gamma)}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_j^{(0)}(\gamma)}{\partial(p\varphi + \psi - \gamma\omega_1)} \Big[B_1 - \frac{d(\omega, \gamma)}{d\tau} \Big] + \gamma \times$$

$$- \frac{\partial^2 u_j^{(0)}(\gamma)}{\partial\tau\, \partial(p\varphi + \psi - \gamma\omega_1)}\omega_1 - \frac{\partial^2 u_j^{(0)}(\gamma)}{\partial_a\, \partial(p\varphi + \varphi - \gamma\omega_1)}\omega_1 \Big[A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial\psi}\Big(\omega_1 -$$

$$-\frac{p}{q}\nu\Big)\frac{\gamma}{2}\Bigg]-\frac{\partial u_j^{(0)}(\gamma)}{\partial_a}\Bigg[\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\Big(\omega_1-\frac{p}{q}\nu\Big)-\frac{\partial^2 A_1}{\partial\psi^2}\Big(\omega_1-\frac{p}{q}\nu\Big)^2\frac{\gamma}{2}\Bigg]-$$

$$-\frac{\partial^2 u_j^{(0)}(\gamma)}{\partial(p\varphi+\psi)\,\partial(p\varphi+\psi-\gamma\omega_1)}\omega_1\Bigg[B_1-\frac{\gamma}{2}\Bigg(\frac{d\omega_1}{d\tau}-\Big(\omega_1-\frac{p}{q}\nu\Big)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Bigg)\Bigg]-$$

$$-\frac{\partial u_j^{(0)}(\gamma)}{\partial(p\varphi+\psi)}\Bigg[\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Big(\omega_1-\frac{p}{q}\nu\Big)-\frac{\gamma}{2}\Big(\omega_1-\frac{p}{q}\nu\Big)^2\frac{\partial^2 B_1}{\partial\psi^2}\Bigg]\Bigg]+\frac{\partial u_j^{(1)}(\gamma)}{\partial(\theta-\gamma\nu)}\nu+$$

$$+\frac{\partial u_j^{(1)}(\gamma)}{\partial(p\varphi+\psi-\gamma\omega_1)}\omega_1\Bigg]+\frac{1}{2}\Bigg[\frac{dg_{ij}(\tau)}{d\tau}u_j^{(0)}+\frac{d\bar{g}_{ij}(\tau)}{d\tau}u_j^{(0)}(\gamma)\Bigg]+$$

$$+\frac{da_{ij}(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial(p\varphi+\psi)}\omega_1\Bigg\},$$

$$u_j^{(0)}(\gamma)=v_j^{(0)}(\tau,a,p\varphi+\psi-\omega_1\gamma),\quad u_j^{(1)}(\tau,a,\theta-\gamma\nu,\ p\varphi+\psi-\omega_1\gamma),$$

$$Q_{i0}^{(1)}(\tau,a,\theta,p\varphi+\psi)=Q_j^{(1)}(\tau,\theta,q_{10},\ldots,q_{10}(\gamma_1),\ldots,q_{10},\ldots,\dot{q}_{10}(\gamma_1)),$$

$$q_{10}(\gamma_1)=u_j^{(0)}(\tau,a,p\varphi+\psi-\gamma_1\omega_1),\quad \dot{q}_{10}(\gamma_1)=\frac{\partial u_j^{(0)}(\tau,a,p\varphi+\psi-\gamma_1\omega_1)}{\partial(p\varphi+\psi-\gamma_1\omega_1)}\omega_1.$$

Для однозначности определения искомых функций из уравнений (8) наложим дополнительные условия на функции $U_j^{(1)}$. Периодические функции $U_j^{(1)}$ должны быть конечными. Поэтому $U_j^{(1)}$ принимают конечные значения, если выполняются условия

$$\sum_{\substack{i=1\\(nq+p(m-1)=0)}}^{N} g_{nm}^{(i1)}(\tau,a)\,\dot{\varphi}_i^{(1)}(\tau)=0,\qquad \sum_{\substack{i=1\\(nq+p(m+1)=0)}}^{N} g_{nm}^{(i1)}(\tau,a)\,\varphi_i^{(1)}(\tau)=0,$$

где

$$g_{nm}^{(i1)}(\tau,a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}G_{i0}^{(1)}(\tau,a,\theta,p\varphi+\psi)\,e^{-i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}d\theta\, d(p\varphi+\psi).$$

Следовательно, согласно условиям, наложенным на исследуемую колебательную систему, находим

$$u_j^{(1)}(\tau,a,\theta,p\varphi+\psi)=\sum_{\substack{n,m\\(nq+p(m\pm1)\neq0)}}\Bigg\{\sum_{i=1}^{N}\frac{D_{ij}(im\omega_1+in\nu)}{D(im\omega_1+in\nu)}g_{nm}^{(i1)}(\tau,a)\Bigg\}\times$$

$$\times e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}+e^{i(p\varphi+\psi)}\sum_{\sigma}\Bigg\{\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\frac{\partial D_{ij}(\omega)}{\partial\omega}}{\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega}}\right\}_{\omega=i\omega_1}\cdot g_{-\sigma p,\sigma q+1}^{(i1)}(\tau,a)\Bigg\}e^{i\sigma q\psi}+$$

$$+e^{-i(p\varphi+\psi)}\sum_{\sigma}\Bigg\{\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\frac{\partial D_{ij}(\omega)}{\partial\omega}}{\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega}}\right\}_{\omega=-i\omega_1}\cdot g_{-\sigma p,\sigma q-1}^{(i1)}(\tau,a)\Bigg\}e^{i\sigma q\psi}. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\tau)\,\varphi_j^{(1)}(\tau)\,\overset{*}{\varphi}{}_i^{(1)}(\tau) = m_1(\tau), \qquad \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}(\tau)\,\varphi_j^{(1)}(\tau)\,\overset{*}{\varphi}{}_i^{(1)}(\tau) = im_2(\tau),$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \bar{c}_{ij}(\tau)\,\varphi_j^{(1)}(\tau)\,\overset{*}{\varphi}{}_i^{(1)}(\tau) = i\bar{m}_2(\tau),$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{dg_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\varphi_j^{(1)}(\tau)\,\overset{*}{\varphi}{}_i^{(1)}(\tau) = m_3(\tau) + i\bar{m}_3(\tau),$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}(\tau)\,\frac{d\varphi_j^{(1)}(\tau)}{d\tau}\,\overset{*}{\varphi}{}_i^{(1)}(\tau) = m_4(\tau) + i\bar{m}_4(\tau), \tag{10}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{d\bar{g}_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\varphi_j^{(1)}(\tau)\,\overset{*}{\varphi}{}_i^{(1)}(\tau) = m_5(\tau) + i\bar{m}_5(\tau),$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \bar{c}_{ij}(\tau)\,\frac{d\varphi_j^{(1)}(\tau)}{d\tau}\,\overset{*}{\varphi}{}_i^{(1)}(\tau) = m_6(\tau) + i\bar{m}_6(\tau), \quad \varphi_j^{(1)}(\tau) = \bar{\varphi}_j^{(1)}(\tau) + i\bar{\bar{\varphi}}_j^{(1)}(\tau).$$

Принимая во внимание обозначения (10), после ряда выкладок получаем для определения A_1 и B_1 систему уравнений

$$\frac{\gamma^2(\tau)}{2}\,\bar{m}_2^2\left[\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right]^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial\varphi^2} + h_1\left[\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi} + ah_2\left[\omega_1(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right]\frac{\partial B_1}{\partial\psi} + h_3 A_1 + h_4 B_1 = h_5\left(-N_1 a + \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} I_{1\sigma}\right) - h_6\left(-N_2 a + \right.$$

$$\left. + \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} J_{2\sigma}\right), \qquad a\,\frac{\gamma^2(\tau)}{2}\,\bar{m}_2^2\left[\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right]^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial\psi^2} + ah_1\left[\omega_1(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right]\frac{\partial B_1}{\partial\psi} - h_2\left[\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right]\frac{\partial A_1}{\partial\psi} + ah_3 B_1 - h_4 A_1 =$$

$$= h_6\left(-N_1 a + \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} J_{1\sigma}\right) + h_5\left(-N_2 a + \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} J_{2\sigma}\right). \tag{11}$$

Здесь введены обозначения:

$$h_1 = -\frac{\gamma^3(\tau)}{2}\,\bar{m}_2^2 + m_1\bar{m}_2\,\frac{\gamma^2(\tau)}{2}\sin\gamma\omega_1, \qquad h_2 = m_1\bar{m}_2\,\frac{\gamma^2(\tau)}{2}\cos\gamma\omega_1 -$$

$$-\frac{\gamma^4(\tau)}{4}\,\bar{m}_2^2\omega_1, \qquad h_3 = (2\omega_1 m_1 + m_2)\,\frac{\gamma^2(\tau)}{2}\,\bar{m}_2\cos\gamma\omega_1 + \frac{\gamma^2(\tau)}{2}\,\bar{m}_2^2,$$

$$h_4 = \bar{m}_2^2\omega_1\,\frac{\gamma^3(\tau)}{2} - \frac{\gamma^2(\tau)}{2}\,\bar{m}_2\sin\gamma\omega_1\cdot(2\omega_1 m_1 + m_2), \qquad h_5 = \frac{\gamma^2(\tau)}{2}\,\bar{m}_2\sin\gamma\omega_1,$$

$$h_6 = -\frac{\gamma^2(\tau)}{2}\,\bar{m}_2\cos\gamma\omega_1, \qquad N_1 = m_3 + m_4 + \left(m_6 + 2\bar{m}_2\,\frac{d(\gamma\omega_1)}{d\tau} + \right.$$

$$+\gamma\bar{m}_6\omega_1+\frac{1}{2}m_5\Big)\cos\gamma\omega_1+\Big(\bar{m}_6-\gamma m_6\omega_1-\gamma\bar{m}_2\omega_1\frac{d(\gamma\omega_1)}{d\tau}+\frac{1}{2}\bar{m}_5-$$

$$-m_2\omega_1\frac{\gamma^2(\tau)}{2}\cdot\frac{d\omega_1}{d\tau}\Big)\sin\gamma\omega_1,\qquad N_2=\bar{m}_3+\bar{m}_4+\frac{d(\omega_1 m_1)}{d\tau}+(\bar{m}_6-\gamma\omega_1 m_6-$$

$$-\gamma\omega_1\bar{m}_2\frac{d(\gamma\omega_1)}{d\tau}+\frac{1}{2}\bar{m}_5-\bar{m}_2\omega_1\frac{\gamma^2}{2}\cdot\frac{d\omega_1}{d\tau}\Big)\cos\gamma\omega_1+\Big(-m_6-2\bar{m}_2\frac{d(\gamma\omega_1)}{d\tau}-$$

$$-\gamma\omega_1\bar{m}_6-\frac{1}{2}m_5\Big)\sin\gamma\omega_1,\qquad J_{1\sigma}=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N}Q_{i0}(\tau,a,\theta,p\varphi+$$

$$+\psi)\,e^{-i\sigma q\psi}\,[\bar{\varphi}_i^{(1)}(\tau)\cos(p\varphi+\psi)-\bar{\bar{\varphi}}_i(\tau)\sin(p\varphi+\psi)]\,d\theta d(p\varphi+\psi),$$

$$J_{2\sigma}=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N}Q_{i0}(\tau,a,\theta,p\varphi+\psi)\,e^{-i\sigma q\varphi}\,[\bar{\varphi}_i^{(1)}(\tau)\sin(p\varphi+\varphi)+$$

$$+\bar{\bar{\varphi}}_i^{(1)}(\tau)\cos(p\varphi+\psi)]\,d\theta d(p\varphi+\psi).$$

После определения функций A_1, B_1, $U_j^{(1)}$ задача сводится к интегрированию и исследованию двух обыкновенных дифференциальных уравнений, что намного проще, поскольку уравнения не содержат запаздываний аргумента.

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 501 с.
2. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.— 431 с.
3. Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев: Вища школа, 1979.— 247 с.
4. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М.: Наука, 1969.— 287 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
25.05.1981 г.