УДК 517.9

Р. И. Собкович

О периодических решениях систем дифференциальных уравнений первого порядка с параметром

Ответ на вопрос, будет ли решение системы дифференциальных уравнений, проходящее через данную точку, периодическим, существенно зависит от выбора самой точки [1]. Если в уравнения входит постоянный параметр, его иногда можно подобрать так, что решение, проходящее через фиксированную точку, будет периодическим. Для системы $x' = f(t, x) - \mu$ с условиями $x(0) = x(T) = x_0$ подобная задача исследовалась в [1].

В настоящей заметке изучается возможность отыскания периодического решения и значений параметра, при которых удовлетворяются заданные краевые условия.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x' = f(t, x, \lambda), \tag{1}$$

где x, f, λ — m-мерные векторы, функция $f(t, x, \lambda)$ определена и непрерывна в области $D = R \times I_1 \times I_2 : t \in R,\ \ x \in [a, b] = I_1,\ \ \lambda \in [-\rho, \rho] = I_2$ $(a, b, \rho \in E^m)$ и периодическая по t с периодом T. Ставится задача отыскания периодического решения системы (1) и такого значения параметра λ, при котором выполняется условие

$$x(0) = x_0 \quad (x_0 \in E^m). \tag{2}$$

Определение. Пару $(x^*(t), \lambda^*)$ назовем решением задачи (1), (2), если функция $x^*(t) \in I_1$ определена при $t \in R$, периодическая с периодом T и при $\lambda^* \in I_2$ удовлетворяет системе (1) и условиям (2).

Заменим задачу (1), (2) эквивалентной ей системой

$$x(t) = x_0 + Lf(t, x, \lambda), \tag{3}$$

$$\int\limits_0^T f(t, x(t), \lambda)\,dt = 0, \tag{4}$$

где оператор L для любой непрерывной при $t \in [0, T]$ функции $\varphi(t)$ задается формулой $L\varphi(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t \varphi(s)\,ds - \frac{t}{T}\int\limits_t^T \varphi(s)\,ds$. В дальнейшем будут использоваться также оператор $\overline{L}$, определяемый равенством $\overline{L}\varphi(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t \varphi(s)\,ds + \frac{t}{T}\int\limits_t^T \varphi(s)\,ds$, и функции $\alpha_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots)$, получаемые с помощью рекуррентного соотношения $\alpha_{i+1}(t) = \overline{L}\alpha_i(t)$, $\alpha_0(t) = 1$. При $t \in [0, T]$ для них имеют место следующие оценки [1]:

$$\alpha_1(t) \leqslant \frac{T}{2}, \quad \alpha_2(t) \leqslant \frac{T}{3}\alpha_1(t), \quad \alpha_{i+1} \leqslant \frac{T^2}{10}\alpha_{i-1}(t) \quad (i \geqslant 2). \tag{5}$$

Предположим, что выполняются условия:

1) множество $D_x = \left[a + \frac{T}{2}M,\ b - \frac{T}{2}M\right]$ не пусто, причем $x_0 \in D_x$ $(M = \max\limits_D |f(t, x, \lambda)|)$;

2) функция $f(t, x, \lambda)$ удовлетворяет в D условию Липшица по переменным x, λ соответственно с матрицами K_1, K_2.

1. Для решения системы (3), (4) построим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t) = x_0 + Lf(t, x_n, \lambda_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

приняв $x_0(t) = x_0$, а λ_n определяя из системы

$$\int\limits_0^T f(t, x_n(t), \lambda_n)\,dt = 0, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{7}$$

Лемма. *Пусть вектор-функция $f(t, x, \lambda)$ определена и непрерывна в области $D_1 = R_1 \times I_1 \times I_2 : t \in [0, T] = R_1,\ \ x \in I_1,\ \ \lambda \in I_2$ и существует постоянная обратимая матрица A такая, что при любых $x \in I_1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in I_2$ выполняются неравенства*

$$\left\| A(\lambda_1 - \lambda_2) - \int\limits_0^T [f(t, x. \lambda_1) - f(t, x, \lambda_2)]\,dt \right\| \leqslant \varepsilon \|\lambda_1 - \lambda_2\| \quad (\varepsilon > 0), \tag{8}$$

$$\varepsilon \|A^{-1}\| < 1, \ rT\|A^{-1}\| \leqslant \|\rho\|(1 - \varepsilon\|A^{-1}\|) \quad (r = \|\max_{(t,x,0) \in D_1} |f(t, x, 0)|\|). \tag{9}$$

Тогда система уравнений (7) при каждой функции $x_n(t)\in I_1$ имеет единственное решение $\lambda_n\in I_2$.

Доказательство. Запишем (7) в виде операторного уравнения

$$\lambda_n=\Phi(\lambda_n), \tag{10}$$

где $\Phi(\lambda_n)=\lambda_n-A^{-1}\int\limits_0^T f(t,x_n(t),\lambda_n)\,dt$. Пусть $\lambda_n\in I_2$. Тогда $\|\Phi(\lambda_n)\|\leqslant$ $\leqslant\|A^{-1}\|\left\{\left\|A\lambda_n-\int\limits_0^T[f(t,x_n,\lambda_n)-f(t,x_n,0)]\,dt\right\|+\left\|\int\limits_0^T f(t,x_n,0)\,dt\right\|\right\}\leqslant$ $\leqslant\|A^{-1}\|(\varepsilon\|\lambda_n\|+rT)$. Если $\lambda_n',\lambda_n''\in I_2$, то $\|\Phi(\lambda_n')-\Phi(\lambda_n'')\|\leqslant\|A^{-1}\|\times$ $\times\left\|A(\lambda_n'-\lambda_n'')-\int\limits_0^T[f(t,x_n,\lambda_n')-f(t,x_n,\lambda_n'')]\,dt\right\|\leqslant\varepsilon\|A^{-1}\|\cdot\|\lambda_n'-\lambda_n''\|$. Следовательно, в силу условий (9), Φ переводит I_2 в I_2 и является сжатием. Поэтому существует единственное решение системы (7) $\lambda_n\in I_2$.

Замечание 1. Для решения системы (7) можно предложить разные методы, в том числе итерационный процесс $\lambda_{n,k+1}=\lambda_{n,k}-A^{-1}\int\limits_0^T f(t,x_n(t),\lambda_{n,k})\,dt$, $k=0,1,\ldots,\lambda_{n,0}=\lambda_{n-1}$, $\lambda_0=\theta$, θ — нуль-вектор, который сходится к решению (7), если выполнены условия леммы.

Замечание 2. Трудно проверяемым условием леммы является существование матрицы A. Отметим, что если f зависит от λ линейно, то в качестве A можно взять матрицу $\left[\int\limits_0^T\frac{\partial f_i}{\partial\lambda_j}\,dt\right]_{i,j=1,\ldots,m}$, если только $\det\left[\int\limits_0^T\frac{\partial f_i}{\partial\lambda_j}\,dt\right]_{i,j=1,\ldots,m}\neq 0$. В этом случае неравенство (8) выполняется при любом ε.

Теорема 1. *Предположим, что функция $f(t,x,\lambda)$ определена и непрерывна в области D, периодична по t с периодом T и удовлетворяет условиям 1), 2). Тогда, если существует постоянная обратимая матрица A такая, что выполняются неравенства (8), (9) и*

$$q_1=\frac{T\|K_1\|}{2}\left(1+\frac{T\|K_2\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\varepsilon\|A^{-1}\|}\right)<1, \tag{11}$$

то последовательность T-периодических функций $x_n(t)$, заданных равенством (6), и последовательность λ_n, определяемых из соотношения (7), сходятся при $n\to\infty$ равномерно по $t\in R$ к единственному решению $(x^*(t),\lambda^*)$ задачи (1), (2) и имеют место оценки погрешностей:

$$\begin{gathered}\|x_n(t)-x^*(t)\|\leqslant\frac{q_1^n}{1-q_1}\frac{\|M\|T}{2},\\ \|\lambda_n-\lambda^*\|\leqslant\frac{q_1^n}{1-q_1}\frac{T^2\|M\|\cdot\|K_1\|\cdot\|A^{-1}\|}{2(1-\varepsilon\|A^{-1}\|)}.\end{gathered} \tag{12}$$

Доказательство. Учитывая условие 1), делаем вывод, что $x_n(t)\in I_1$ $(n=0,1,\ldots)$, и при каждой функции $x_n(t)$ в силу леммы существует единственное $\lambda_n\in I_2$. Представим (7) в виде

$$\lambda_n=\lambda_n-A^{-1}\int\limits_0^T f(t,x_n(t),\lambda_n)\,dt. \tag{13}$$

Тогда с помощью неравенства (8) находим

$$\| \lambda_{n+1} - \lambda_n \| \leqslant \| A^{-1} \| \{ \varepsilon \| \lambda_{n+1} - \lambda_n \| + \| K_1 \| T \max_{t \in [0,T]} \| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| \},$$

откуда следует, что

$$\| \lambda_{n+1} - \lambda_n \| \leqslant \frac{T \| K_1 \| \| A^{-1} \|}{1 - \varepsilon \| A^{-1} \|} \max_{t \in [0,T]} \| x_{n+1}(t) - x_n(t) \|. \qquad (14)$$

Из соотношений (6) получаем $\| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| \leqslant \overline{L} (\| K_1 \| \cdot \| x_n(t) - x_{n-1}(t) \| + \| K_2 \| \cdot \| \lambda_n - \lambda_{n-1} \|) \leqslant q_1 \max_{t \in [0,T]} \| x_n(t) - x_{n-1}(t) \|$, откуда заключаем, что при любом $k \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\| x_{n+k}(t) - x_n(t) \| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} q_1^{n+i} \| M \| \alpha_1(t), \quad t \in [0, T]. \qquad (15)$$

Так как $q_1 < 1$, то последнее соотношение доказывает равномерную по $t \in R$ сходимость при $n \to \infty$ функций $x_n(t)$.

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x^*(t)$. Очевидно, что $x^*(t) \in I_1$, удовлетворяет условиям (2) и, как предел T-периодических функций $x_n(t)$, является периодической с периодом T функцией. Из неравенства (14) следует сходимость последовательности λ_n. Обозначим $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda^*$. Переходя к пределу в (6), (7), убеждаемся, что $x^*(t)$ удовлетворяет системе (1). Единственность решения доказывается методом от противного. Оценки (12) следуют из неравенств (14), (15). Теорема доказана.

Если последовательные приближения $x_n(t)$, как и раньше, определять по формуле (6), а λ_n определить с помощью рекуррентного соотношения

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - A^{-1} \int_0^T f(t, x_n(t), \lambda_n) \, dt, \; n = 0, 1, \ldots, \lambda_0 = \theta, \qquad (16)$$

то можно получить новые условия разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 с заменой неравенства (11) требованием, чтобы все собственные числа матрицы*

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{T}{2} \| K_1 \| & \frac{T}{2} \| K_2 \| \\ T \| A^{-1} \| \cdot \| K_1 \| & \varepsilon \| A^{-1} \| \end{pmatrix} \qquad (17)$$

лежали в единичном круге. Тогда последовательность периодических с периодом T функций $x_n(t)$, заданных равенством (6), и последовательность λ_n, определяемых соотношением (16), сходятся при $n \to \infty$ равномерно по $t \in R$ к единственному решению $(x^*(t), \lambda^*)$ задачи (1), (2). Оценка погрешностей при этом задается неравенством

$$\begin{pmatrix} \| x_n(t) - x^*(t) \| \\ \| \lambda_n - \lambda^* \| \end{pmatrix} \leqslant Q_1^n (I - Q_1)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{T}{2} \| M \| \\ T \| A^{-1} \| \cdot \| M \| \end{pmatrix},$$

I — единичная матрица.

2. Предположим, что систему (1) можно представить в виде

$$x' = f(t, x, \lambda) - B\lambda, \qquad (18)$$

где B — постояннная $m \times m$-мерная обратимая матрица. Заменим задачу (18), (2) эквивалентной ей системой

$$x(t) = x_0 + Lf(t, x, \lambda), \quad B\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t), \lambda) \, dt, \qquad (19)$$

для решения которой построим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t) = x_0 + Lf(t, x_n, \lambda_n), \tag{20}$$

$$\lambda_{n+1} = T^{-1}B^{-1}\int_0^T f(t, x_n(t), \lambda_n)\,dt, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{21}$$

приняв $x_0(t) = x_0$, $\lambda_0 \in \theta$.

Теорема 3. *Пусть функция $f(t, x, \lambda)$ определена и непрерывна в области D, периодична по t с периодом T и удовлетворяет условиям 1), 2). Тогда, если выполняется неравенство*

$$|B^{-1}|M \leqslant \rho \tag{22}$$

и все собственные числа матрицы

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{T}{2}K_1 & \frac{T}{2}K_2 \\ |B^{-1}|K_1 & |B^{-1}|K_2 \end{pmatrix}$$

лежат в единичном круге, то последовательность T-периодических функций $x_n(t)$ и последовательность λ_n, заданные соответственно соотношениями (20), (21), сходятся при $n \to \infty$ равномерно по $t \in R$ к единственному решению $(x^*(t), \lambda^*)$ задачи (18), (2) с оценкой погрешностей

$$\begin{pmatrix} |x_n(t) - x^*(t)| \\ |\lambda_n - \lambda^*| \end{pmatrix} \leqslant Q_2^n (I \cdot Q_2)_1^{-1} \begin{pmatrix} \frac{T}{2}M \\ |B^{-1}|M \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{23}$$

(*символ* $|\cdot|$ *понимаем следующим образом: если* $C = [c_{ij}]_{i,j=1,\dots,m}$, *то* $C| = [|c_{ij}|]_{i,j=1,\dots,m}$).

Замечание 3. Если в отличие от (21) определять λ_n как решение системы

$$B\lambda_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_n(t), \lambda_n)\,dt, \tag{24}$$

то ограничение на матрицу Q_2 в теореме 3 можно заменить требованием выполнения неравенства $q_2 = \dfrac{T\|K_1\|}{2(1 - \|B^{-1}\|\cdot\|K_2\|)} < 1$.

3. Рассмотрим задачу (1), (2) в случае $m = 1$. Предположим, что для всех (t, x, λ_1), $(t, x, \lambda_2) \in D$ выполняется неравенство

$$N|\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant |f(t, x, \lambda_1) - f(t, x, \lambda_2)| \leqslant K_2|\lambda_1 - \lambda_2| \quad (N > 0). \tag{25}$$

В частности, условию (25) удовлетворяют функции, непрерывно дифференцируемые по λ, для которых $0 < N \leqslant \left|\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\right| \leqslant K_2$.

Для решения задачи (1), (2) воспользуемся итерационным процессом (6), (7). Пусть при $x(t) \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\int_0^T f(t, x(t), -\rho)\,dt \cdot \int_0^T f(t, x(t), \rho)\,dt \leqslant 0. \tag{26}$$

Тогда в силу условия (26), уравнение (7) имеет единственное решение λ_n при каждом $n = 0, 1, \dots$. Одним из способов его отыскания может быть итерационный процесс

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{\operatorname{sign} f'_\lambda}{\max\limits_D |f'_\lambda|}\int_0^T f(t, x(t), \lambda_k)\,dt, \quad k = 0, 1, \dots, \lambda_0 = 0.$$

Остановимся на вопросе сходимости последовательностей $\{x_n(t)\}$, $\{\lambda_n\}$. Учитывая периодичность функций $x_n(t)$, будем рассматривать $t \in [0, T]$. Из тождества

$$\int_0^T [f(t, x_n(t), \lambda_n) - f(t, x_n(t), \lambda_{n-1})]\,dt =$$

$$= \int_0^T [f(t, x_{n-1}(t), \lambda_{n-1}) - f(t, x_n(t), \lambda_{n-1})]\,dt,$$

учитывая знакопостоянство f'_λ, следует неравенство

$$|\lambda_n - \lambda_{n-1}| \leqslant \frac{K_1}{N} \max_{t\in(0,T]} |x_n(t) - x_{n-1}(t)|, \tag{27}$$

с помощью которого из (6) последовательно находим

$$r_1(t) = |x_1(t) - x_0| \leqslant M\alpha_1(t) \leqslant \frac{T}{2} M, \quad r_2(t) = |x_2(t) - x_1(t)| \leqslant$$

$$\leqslant K_1 M \left(\alpha_2(t) + \frac{TK_2}{2N} \alpha_1(t)\right) \leqslant \frac{K_1 T^2 M}{4} \left(\frac{2}{3} + \frac{K_2}{N}\right).$$

Предположим, что, используя соотношения (5), для $r_n(t)$ можно получить оценку $r_n(t) = |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leqslant a_n\alpha_2(t) + b_n\alpha_1(t) \leqslant \frac{T}{2}\left(\frac{T}{3} a_n + b_n\right)$, где a_n, b_n — некоторые постоянные. Тогда $r_{n+1}(t) \leqslant \frac{K_1 T}{2}\left(\frac{T}{3} a_n + b_n\right) \times \left(\alpha_2(t) + \frac{K_2 T}{2N} \alpha_1(t)\right) = a_{n+1}\alpha_2(t) + b_{n+1}\alpha_1(t)$. Таким образом, определены две числовые последовательности

$$a_{n+1} = \frac{K_1}{2}\left(\frac{T}{3} a_n + b_n\right), \quad b_{n+1} = \frac{K_2 T}{2N}\left(\frac{T}{3} a_n + b_n\right). \tag{28}$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то, очевидно, $r_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(t, x, \lambda)$ определена и непрерывна в D, периодична по t с периодом T и удовлетворяет условиям 1), (25), (26). Тогда, если*

$$q_3 = \frac{K_1 T}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{K_2}{N}\right) < 1, \tag{29}$$

то существует единственное решение $(x^*(t), \lambda^*)$ задачи (1), (2) к которому сходятся при $n \to \infty$ равномерно по $t \in R$ последовательности $\{x_n(t)\}$, $\{\lambda_n\}$, определенные соответственно равенствами (6), (7).

Доказательство теоремы 4 немедленно следует из того, что последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ в силу условия (29) сходятся к 0, вследствие чего $r_n(t) \to 0$ равномерно по $t \in R$. Остановимся на доказательстве единственности решения. Предположим, что существует второе решение задачи (1), (2), которое мы обозначим $(y^*(t), \mu^*)$. Из ограниченности $x^*(t)$, $y^*(t)$ следует, что существуют числа a^*, b^* такие, что

$$|x^*(t) - y^*(t)| \leqslant a^*\alpha_2(t) + b^*\alpha_1(t) \leqslant \frac{T}{2}\left(\frac{T}{3} a^* + b^*\right). \tag{30}$$

Так как $|\lambda^* - \mu^*| \leqslant \frac{K_1}{N} \max_{t\in[0,T]} |x^*(t) - y^*(t)| \leqslant \frac{K_1 T}{2N}\left(\frac{T}{3}a^* + b^*\right)$, то из (3), (4) находим $|x^*(t) - y^*(t)| \leqslant q_3 (a^*\alpha_2(t) + b^*\alpha_1(t))$. Повторив данный процесс n раз, получаем $|x^*(t) - y^*(t)| \leqslant q_3^n (a^*\alpha_2(t) + b^*\alpha_1(t))$, что с учетом неравенства (29) приводит к тождеству $x^*(t) = y^*(t)$. Равенство $\lambda^* = \mu^*$ следует из неравенства $|\lambda^* - \mu^*| \leqslant \frac{K_1}{N} \max_{t\in[0,T]} |x^*(t) - y^*(t)|$.

Замечание 4. Алгоритм данной заметки можно применять к исследованию двухточечных краевых задач с параметром. Задача $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$ сводится к эквивалентной системе $x(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \times \left[\int_0^t f(s, x(s), \lambda)\, ds + x_0\right] - \frac{t}{T}\left[\int_t^T f(s, x(s), \lambda)\, ds - x_1\right]$, $\int_0^T f(s, x(s), \lambda)\, ds = x_1 - x_0$. Такой подход дает возможность улучшить результаты ряда работ [2 — 5].

1. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. К. «Вища школа», 1976.— 181 с.
2. Курпель Н. С., Марусяк А. Г. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами. УМЖ, 1980, 32, № 2, с. 223—226.
3. Сеидов З. Б. Краевые задачи с параметром для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Сиб. мат. жур. № 1, 9, 1968, с. 223—230.
4. Поволоцкий А. И., Мосягин В. В. К задаче об управлении для дифференциального уравнения в пространстве Банаха. Уч. зап. ЛГТИ им. Герцена, вып. 302, 1967, с. 229—235.
5. Гома И. А. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром. УМЖ, 1977, 29, № 6, с. 800—807.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 21.05.1980 г.
после переработки — 12.01.1981 г.