УДК 519.46:530.145

В. И. Фущич

Об одном способе исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений

Хорошо разработанные методы исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных [1] не применимы к интегральным уравнениям. В настоящее время отсутствуют какие-либо методы исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений.

Здесь приведен способ отыскания алгебр инвариантности для интегро-дифференциального уравнения специального типа

$$\hat{p}_0\varphi(t, x) = \hat{L}^{\frac{r}{k}}\varphi(t, x), \tag{1}$$

где

$$\hat{p}_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad a = 1, 2, \ldots, n, \quad \hat{L} = \hat{p}_a\hat{p}_a + m^2, \tag{2}$$

$$\hat{p}_a\hat{p}_a = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3^2 + \ldots + \hat{p}_n^2 = -\Delta, \quad x \in R^n,$$

r, k — целые числа (число r нацело не делится на k), $m > 0$ — постоянная величина.

В релятивистской квантовой теории часто встречается уравнение вида

$$\hat{p}_0\varphi(t, x) = \hat{L}^{1/2}\varphi(t, x). \tag{3}$$

Ради простоты рассмотрим уравнение (3). Все сказанное ниже очевидным образом переносится и на уравнение (1) с произвольными r и k, а также на уравнения, в которых $\hat{L}$ — произвольный положительный дифференциальный оператор.

Уравнение (3) может быть записано так:

$$\hat{p}_0\varphi(t, x) = \int d^3q d^3y \exp\{iq_a(x_a - y_a)\} L^{1/2}(q)\varphi(t, y) \tag{4}$$

где

$$L^{1/2}(q) = (q_a q_a + m^2)^{1/2} = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + m^2)^{1/2} — \tag{5}$$

символ оператора $\hat{L}^{1/2}$. В дальнейшем все операторы будем писать без «крышки» $\wedge$.

1. Уравнение (3) инвариантно относительно некоторой совокупности операторов $\{Q_A\}$, если выполняются условия [2, 3]

$$[p_0 - L^{1/2}, Q_A]\varphi(t, x) = 0, \tag{6}$$

где [,] — коммутатор. Для отыскания операторов Q_A, удовлетворяющих условию (6), поступим следущим образом. Подействовав слева на уравнение (3) оператором p_0, получим волновое дифференциальное уравнение.

$$(p_0^2 - p_a^2 - m^2)\varphi(t, x) = (p_0 - L^{1/2})(p_0 + L^{1/2})\varphi(t, x) = 0. \tag{7}$$

К дифференциальному уравнению (7) можем применить лиевский [1] или нелиевский метод [2]. С помощью метода Ли—Овсянникова можно показать, что максимальной (в смысле Ли) алгеброй инвариантности уравнения (7) является 10-мерная алгебра Пуанкаре, базисные элементы $\{Q_1, Q_2, \ldots$ $\ldots, Q_{10}\} \equiv \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$ которой задаются операторами

$$P_0^I = p_0, \quad P_a^I = p_a, \quad J_{\mu\nu}^I = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{8}$$

Поскольку всякое решение уравнения (3) является решением уравнения (7) (обратное, конечно, неверно), можно ожидать, что алгебра (8) или ее подалгебры могут оказаться алгеброй инвариантности интегро-дифференциального уравнения (3). В нашем случае непосредственной проверки можно убедиться, что условия (6) выполняются для всех операторов (8), т. е.

$$[p_0 - L^{1/2}, P_\mu^I] = 0 = [p_0 - L^{1/2}, J_{ab}^I], \quad a, b = 1, 2, 3; \tag{9}$$

$$[p_0 - L^{1/2}, J_{0a}]\varphi(t, x) = ip_a L^{-1/2}(p_0 - L^{1/2})\varphi(t, x) = 0.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Алгеброй инвариантности уравнения (3) является 10-мерная алгебра Ли; базисные элементы этой алгебры задаются дифференциальными операторами первого порядка (8).*

Из приведенного вытекает следующий способ вычисления алгебр инвариантности для уравнений типа (1): 1) построить дифференциальное уравнение, подмножество решений которого является решениями интегро-дифференциального уравнения; 2) лиевским или нелиевским методом найти алгебру инвариантности дифференциального уравнения; 3) по найденной алгебре инвариантности дифференциального уравнения, проверяя условие инвариантности (6), отыскать алгебру инвариантности интегро-дифференциального уравнения (1).

2. Выясним вопрос: существуют ли алгебры инвариантности интегро-дифференциального уравнения (3), которые не являются таковыми для дифференциального уравнения?

Рассмотрим совокупность таких десяти $\{Q\}$ интегро-дифференциальных операторов [4]:

$$P_0^{II} = L^{1/2}, \quad P_a^{II} = p_a, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad J_{0a}^{II} = tp_a - \frac{1}{2}(x_a L^{1/2} + L^{1/2} x_a). \tag{10}$$

Подставляя операторы (10) в условие инвариантности, убеждаемся, что

$$[p_0 - L^{1/2}, P_\mu^{II}]_- = 0 = [p_0 - L^{1/2}, J_{\mu\nu}^{II}],\quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

т. е. уравнение (3) инвариантно относительно алгебры (10). Проверяя условие инвариантности для уравнения (7)

$$[p_0^2 - p_a^2 - m^2, Q_A]_- \varphi = 0,\quad A = 1, 2, \dots, 10, \tag{11}$$

убеждаемся, что оно не выполняется, если $\{Q_A\}$ задаются формулами (10). Следовательно, интегро-дифференциальное уравнение (3) инвариантно относительно алгебры (10), а дифференциальное уравнение не инвариантно относительно этой алгебры. Уравнение (7) инвариантно только относительно 7-мерной подалгебры алгебры (10).

Укажем еще одну алгебру инвариантности уравнения (3), которая также не является алгеброй инвариантности дифференциального уравнения (7). Рассмотрим совокупность операторов

$$\begin{gathered} P_a^{III} = P_a = p_a,\quad J_{ab}^{III} = J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ J_{0a}^{III} = G_a = t\tilde{p}_a - m x_a,\quad M = m\hat{1}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\hat{1}$ — единичный оператор, $\tilde{p}_a$ — неизвестный оператор, явный вид которого определим из условия инвариантности уравнения (3) относительно операторов G_a, т. е. из условия

$$[p_0 - L^{1/2}, G_a]_- = i\tilde{p}_a + m\,[L^{1/2}, x_a]_- = 0, \tag{13}$$

откуда получаем

$$\tilde{p}_a = m p_a L^{-1/2}. \tag{14}$$

Для операторов (12) условие инвариантности (6) выполняется и, кроме того, они удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered} [P_a, J_{bc}]_- = i\,(\delta_{ac}P_b - \delta_{ab}P_c),\ [P_a, P_b]_- = 0, \\ [P_a, G_b]_- = i\delta_{ab}M,\ [G_a, J_{bc}]_- = i\,(\delta_{ac}G_b - \delta_{ab}G_c), \\ [J_{ab}, J_{cr}]_- = i\,(\delta_{ac}J_{br} + \delta_{br}J_{ac} - \delta_{ar}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ar}), \\ [G_a, G_b]_- = 0,\quad a, b, c, r = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{15}$$

Следует отметить, что оператор $P_0^{III} = p_0$ коммутирует с оператором $p_0 - L^{1/2}$ уравнения (3). Однако оператор P_0^{III} вместе с операторами (12) не образуют конечномерной алгебры Ли. Подытожим сказанное в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Уравнение (3) инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли, являющейся подалгеброй 11-мерной алгебры Галилея. Базисные элементы этой алгебры задаются формулами (12) и удовлетворяют коммутационным соотношениям (15).*

Аналогичную теорему можно доказать и для интегро-дифференциального уравнения вида

$$p_0\varphi(t, x) = \left\{m_0^2 + \frac{(p_a p_a)^2}{4m_1^2}\right\}^{1/2} \varphi(t, x), \tag{16}$$

где m_0 и m_1 — постоянные.

Для уравнения (16) базисные элементы алгебры инвариантности будут задаваться формулами (12), где

$$\tilde{p}_a = p_a \frac{p_b^2}{2m_1}\left\{m_0^2 + \frac{(p_a p_a)^2}{4m_1^2}\right\}^{-1/2} \tag{17}$$

— интегро-дифференциальный оператор.

Уравнение (16) можно интерпретировать как уравнение движения для неточечной частицы в нерелятивистской квантовой механике. Если в (16) положить $m_0 = 0$, то оно совпадет с дифференциальным уравнением Шредингера.

З а м е ч а н и е 1. Все найденные базисные элементы алгебр инвариантности уравнений, кроме алгебры (8), задаются интегро-дифференциальными операторами. Вот почему для построения группы по заданному представлению алгебры Ли мы не имеем возможности применить теоремы Ли. Они применимы только тогда, когда базисные элементы алгебры Ли являются операторами первого порядка. В нашем случае для построения группы по алгебре Ли необходимо воспользоваться формулой Кэмпбелла—Хаусдорфа [2, 3].

З а м е ч а н и е 2. Основная идея настоящей заметки — сопоставление интегро-дифференциального уравнения с некоторым дифференциальным уравнением. С помощью аналогичной идеи можно изучить теоретико-алгебраические свойства квазилинейного уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (x_1, \ldots x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a (x_1, x_2, \ldots x_n, u). \tag{18}$$

Это нелинейное уравнение можно сопоставить с линейным уравнением вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (x, u) \frac{\partial V (x, u)}{\partial x_i} + a (x, u) \frac{\partial V (x, u)}{\partial u} = 0. \tag{19}$$

Изучив теоретико-алгебраические свойства этого линейного уравнения и воспользовавшись известной теоремой о связи решений уравнений (18) и (19) , можно установить алгебру инвариантности нелинейного уравнения (18). Таким же способом можно исследовать алгебраические свойства не только квазилинейного уравнения, но и существенно нелинейного, если, конечно, удается сопоставить этому уравнению либо линейное, либо более простое нелинейное уравнение.

Предложенный алгоритм, конечно, применим и к определенным системам интегро-дифференциальных уравнений. Так, например, к системам уравнений [3]

$$p_0 \vec{E} (t, \vec{x}) = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2} \vec{H} (t, \vec{x}), \quad p_0 \vec{H} (t, \vec{x}) = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2} \vec{E} (t, \vec{x}),$$

$$\vec{E} = (E_1, E_2, E_3), \quad \vec{H} = (H_1, H_2, H_3),$$

$$p_0 A_\mu (x) = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2} A_\mu (x), \quad p_\mu A^\mu (x) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Эти системы уравнений, в некотором смысле, очень близки к системе Максвелла для электромагнитного поля. Первая система обладает той же группой симметрии, что и дифференциальная система Максвелла в вакууме. Каждая компонента векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяет уравнению Даламбера.

Следует отметить, что дифференциальное уравнение, полученное как следствие из интегро-дифференциального уравнения может иметь группу инвариантности, вообще говоря, шире или уже, чем исходное уравнение.

В заключение приведем интегро-дифференциальное уравнение с осцилляторным потенциалом:

$$p_0 \varphi (t, \vec{x}) = (p_a p_a + m^2 + \lambda x_a x_a)^{1/2} \varphi (t, x), \tag{20}$$

где $x_a x_a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, λ — постоянная величина, для которого можно эффективно применить указанный алгоритм.

Чтобы воспользоваться нелиевским алгоритмом для отыскания алгебры инвариантности уравнения (18), необходимо привести оператор $L = p_a p_a + m^2 + \lambda x_a x_a$ к диагональному виду.

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М., Наука, 1978.— 400 с.
2. Фущич В. И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных.— В сб.: Теоретико-групповые методы в математической физике. Киев, 1978, с. 5—44.
3. Фущич В. И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики.— ДАН СССР, 1979, **246**, № 4, 846.
4. Фущич В. И. О дополнительной инвариантности уравнения Клейна—Гордона—Фока.— ДАН СССР, 1976, **230**, № 3, 570.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
28.04.1980 г.