УДК 513.88

*В. А. Хацкевич*

# О неподвижных точках аналитических отображений банахова пространства

В настоящей статье устанавливается существование неподвижной точки у аналитического отображения, переводящего некоторый шар банахова пространства в себя. Этот результат служит основой доказательства теоремы о расширении инвариантного подпространства плюс-оператора до максимального неотрицательного с сохранением инвариантности. При этом обобщаются некоторые известные теоремы (см. [1]—[3]).

1. Пусть банахово пространство $\mathfrak{X}$ сопряжено к некоторому нормированному пространству $\Upsilon : \mathfrak{X} = \Upsilon^*$; $B_\alpha$ — открытый шар в $\mathfrak{X}$ радиуса $\alpha : B_\alpha = \{x : x \in \mathfrak{X}, \|x\| < \alpha\}$. Рассмотрим аналитическое отображение $F : B_\alpha \to \mathfrak{X}$, т. е. $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)$, где $H_n : B_\alpha \to \mathfrak{X}$ — однородные операторы степени $n$ [4]. Наряду с $F$ рассмотрим параметризованное отображение $F_\lambda$, задаваемое равенством $F_\lambda(x) = F(\lambda x)$, где $x \in B_\alpha$, $\lambda \in C$.

Теорема 1. *Пусть* $\mu \leqslant \nu \leqslant \alpha$. *Если* $F(B_\nu) \subset B_\mu$, *то при всех* $\lambda : |\lambda| < \frac{\nu}{\mu}$ *отображение* $F_\lambda$ *имеет в* $B_\mu$ *неподвижную точку* $x(\lambda)$, *аналитически зависящую от* $\lambda$. *Если* $F$ *непрерывно в ультраслабой топологии* $\sigma(\mathfrak{X}, \Upsilon)$ *на замкнутом шаре* $\overline{B}_\nu$, *то неподвижная точка* $x(\lambda)$ *существует для всех* $\lambda$ *из замкнутого круга* $|\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu}$.

Доказательство. Положим при $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n(\lambda) = F_\lambda(x_{n-1}) \left( x_0 \in B_\mu,\ |\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu} \right). \tag{1}$$

Тогда $x_n(\lambda) \in \overline{B}_\mu$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ . В силу ультраслабой компактности шара $\overline{B}_\mu$ последовательность $\{x_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ компактна в топологии ультраслабой сходимости, равномерной на круге $|\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu}$. Поэтому предельные функции последовательности ультраслабо аналитические, следовательно [4], аналитические при $|\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu}$ и ультраслабо непрерывные в круге $|\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu}$.

Из аналитичности $F$ следует, что на некотором шаре $B_\rho$ ($\rho \leqslant \alpha$) выполнено условие Липшица $\| F(x) - F(y) \| \leqslant h_\rho \| x - y \|$ ($x, y \in B_\rho$, $0 \leqslant L_\rho < \infty$). Поэтому для всех $x, y \in B_\mu$ при $|\lambda| \leqslant \frac{\rho}{\mu}$ имеем: $\| F_\lambda(x) - F_\lambda(y) \| \leqslant |\lambda| \times$ $\times h_\rho \| x - y \|$. Отсюда следует, что при $|\lambda| < (h_\rho)^{-1}$ последовательность (1) сходится к единственной неподвижной точке $x(\lambda)$ отображения $F_\lambda$. В силу единственности аналитического продолжения заключаем о существовании у последовательности (1) единственной предельной функции $x(\lambda)$ при всех $\lambda : |\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu}$, а также о справедливости равенства

$$F_\lambda(x(\lambda)) = x(\lambda) \left( \lambda < \frac{\nu}{\mu} \right). \tag{2}$$

Если $F$ ультраслабо непрерывно на $\overline{B}_\nu$, то на основании ультраслабой непрерывности $x(\lambda)$ при $|\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu}$ равенство (2) распространяется на замкнутый круг $|\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu}$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим приложения полученных выше результатов в теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой.

Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ — банахово $J_p$-пространство с индефинитной метрикой $J_p(x) = \| x_1 \|^p - \| x_2 \|^p$ ($p > 1$) [5], где $x \in \mathfrak{B}$, $x_i = \mathcal{P}_i x$ ($i = 1, 2$), $\mathcal{P}_i : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_i$ — ограниченные взаимно дополнительные ($\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = I$) проекторы, отвечающие разложению $\mathfrak{B}$ в прямую сумму подпространств $\mathfrak{B}_i$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим класс всех максимальных неотрицательных подпространств $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{B}$ ($\mathcal{P}_1 \mathfrak{L} = \mathfrak{B}_1$); через $\mathcal{K}$ — семейство угловых операторов всех $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$. Тогда любому $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$ отвечает $K \in \mathcal{K}$ такое, что $\mathfrak{L} = (\mathcal{P}_1 + K)\mathfrak{B}_1$. Как известно [5] совпадает с замкнутым единичным шаром $\overline{B}_1$ в $\mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$-пространстве ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{B}_2$. Определенный всюду в $\mathfrak{B}$ линейный оператор $A$ называется плюс-оператором, если из $x \in \mathfrak{B}$, $J_p(x) \geqslant 0$ следует $J_p(Ax) \geqslant 0$. Через $\mathfrak{N}(A)$ обозначается ядро $A : \mathfrak{N}(A) = \{x : x \in \mathfrak{B}, \ Ax = 0\}$.

Рассмотрим ограниченные линейные операторы.

Известно, что плюс-оператор $A$, переводящий подпространства $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$ в $A\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$, порождает дробно-линейное преобразование семейства $\mathcal{K}$ по формуле

$$F(K) = (A_{21} + A_{22}K)(A_{11} + A_{12}K)^{-1}, \tag{3}$$

где $K \in \mathcal{K}$, $A_{ik} = \mathcal{P}_i A \mathcal{P}_k$ ($i, k = 1, 2$).

Плюс-оператор $A$ называется строгим, если $\mu(A) = \inf\limits_{J_p(x)=1} J_p(Ax) > 0$.

Лемма. *Пусть $A$ — строгий плюс-оператор. Следующие утверждения эквиваленты*: а) *найдется $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$ такое, что $A\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$*, в) *$A\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$ для всех $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$*, с) *оператор $A_{11}$ гомеоморфно отображает $\mathfrak{B}_1$ на $\mathfrak{B}_1$ и $\| A_{11}^{-1} A_{12} \| < 1$.*

Доказательство. Эквивалентность а) и в) установлена в [5]. Как легко видеть, из с) следует в). Установим импликацию в) $\to$ с). Условие в) эквивалентно тому, что $A_{11} + A_{12}K$ гомеоморфно отображает $\mathfrak{B}_1$ на $\mathfrak{B}_1$ при всех $K \in \mathcal{K}$. Взяв $K = 0$, получаем $A_{11}$ — гомеоморфизм $\mathfrak{B}_1$ на $\mathfrak{B}_1$. Из очевидного неравенства $\mu(\mathcal{P}_1 A) \geqslant \mu(A)$ следует [5], что ядро $\mathfrak{N}(\mathcal{P}_1 A)$ равномерно отрицательно: для всех $x = x_1 + x_2 \in \mathfrak{N}(\mathcal{P}_1 A)$ найдется такое $\gamma$ ($0 < \gamma \leqslant 1$), что $\| x_1 \| \leqslant (1 - \gamma) \| x_2 \|$. Пусть $x_2 \in \mathfrak{B}_2$, $x_1 = A_{11}^{-1} A_{12} x_2$. Тогда $x_1 - x_2 \in \mathfrak{N}(\mathcal{P}_1 A)$. Поэтому $\| A_{11}^{-1} A_{12} x_2 \| \leqslant (1 - \gamma) \| x_2 \|$, откуда $\| A_{11}^{-1} A_{12} \| \leqslant$ $\leqslant 1 - \gamma$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $A$ — строгий оператор со свойством* а). *Тогда*: *d) оператор $A$ по формуле* (3) *порождает дробно-линейное преобразование*

$F$; (e) *отображение* $F$ *аналитично на шаре* $B_\alpha$, *где* $\alpha = (\| A_{11}^{-1} A_{12} \|)^{-1}$ и $F(B_1) \subset B_1$; *при каждом* $\rho < \alpha$ *на шаре* $\bar{B}_\rho$ *отображение* $F$ *удовлетворяет условию Липшица с константой*

$$L_\rho = \frac{\alpha}{\alpha - \rho} \| A_{11}^{-1} \| (\| A_{22} \| + \left( (\| A_{21} \| + \rho \| A_{22} \|) \| A_{11}^{-1} \| A_{12} \| \frac{\alpha}{\alpha - \rho} \right). \quad (4)$$

Доказательство. Утверждение $d$) следует из $b$). В силу $c$) для всех $Z \in B_\alpha$ сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (A_{11}^{-1} A_{12} Z)^n A_{11}^{-1} = (A_{11} + A_{12} Z)^{-1}$), откуда $F(Z)$ аналитично на $B_\alpha$. Включение $F(B_1) \subset B_1$ следует из строгости плюс-оператора $A$ [5].

Пусть $\rho < \alpha$, $X, Y \in B_\rho$. Имеем $F(X) - F(Y) = A_{22}(X - Y)(A_{11} + A_{12}X)^{-1} + (A_{21} + A_{22}Y)((A_{11} + A_{12}X)^{-1} - (A_{11} + A_{12}Y)^{-1})$. Но $(A_{11} + A_{12}X)^{-1} - (A_{11} + A_{12}Y)^{-1} = (A_{11} + A_{12}X)^{-1} A_{12}(Y - X)(A_{11} + A_{12}Y)^{-1}$. Для $Z \in B_\rho$ имеем: $\| (A_{11} + A_{12}Z)^{-1} \| \leqslant \| A_{11}^{-1} \| \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{\alpha} \right)^n = \| A_{11}^{-1} \| \frac{\alpha}{\alpha - \rho}$. Тем самым $\| F(X) - F(Y) \| \leqslant L_\rho \| X - Y \|$, где $L_\rho$ определяется равенством (4).

Через $\mathfrak{J}$ обозначим совокупность всех таких подпространств $\mathfrak{J}$ из $\mathfrak{B}$, для каждого из которых найдется $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$ такое, что $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{L}$.

Ниже предполагается, что плюс-оператор $A$ обладает свойством $c$). Строгость $A$ не предполагается.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{B}_2$ *сопряжено к некоторому нормированному пространству* $\mathfrak{N}$, $A$ — *плюс-оператор в* $\mathfrak{B}$. *Пусть* $0 < \mu \leqslant \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant \alpha$. *Если порожденное оператором* $A$ *дробно-линейное преобразование* $F$ *удовлетворяет условию* $F(B_\nu) \subset B_\mu$, *то при всех* $\lambda$: $|\lambda| < \frac{\nu}{\mu}$ *оператор* $A_\lambda = \begin{pmatrix} A_{11} & \lambda A_{12} \\ A_{21} & \lambda A_{22} \end{pmatrix}$ *обладает свойством*:

*Для любого* $\mathfrak{E} \in \mathfrak{J}$ *со свойством* $\overline{A_\lambda \mathfrak{E}} = \mathfrak{E}$ *найдется* $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$ *такое, что* $\mathfrak{J} \in \mathfrak{L}$, $A\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$. Если оператор $A_{12}$ вполне непрерывен, то свойство (5) распространяется на замкнутый круг $|\lambda| \leqslant \frac{\nu}{\mu}$.

Доказательство. Из $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{N}^*$ следует [6]: $\mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \mathrm{Y}^*$, где $\mathrm{Y}$ — нормированное пространство. Полная непрерывность оператора $A_{12}$ влечет непрерывность $F$ на $\bar{B}_\nu$ в ультраслабой топологии $\sigma(\mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2), \mathrm{Y})$. В силу леммы и следствия 1 мы оказываемся в условиях теоремы 1.

Положим $B_\mu(\mathfrak{E}) = \{X : X \in B_\mu, \mathfrak{E} \subset (\mathscr{P}_1 + X)\mathfrak{B}_1\}$. Из $\mathfrak{E} \in \mathfrak{J}$ и $\overline{A_\lambda \mathfrak{E}} = \mathfrak{E}$ следует: $B_\mu(\mathfrak{E}) \neq \varnothing$. Легко проверяется ультраслабая компактность $B_\mu(\mathfrak{E})$. Рассмотрим итерационную последовательность (1) при $x_0 \in B_\mu(\mathfrak{E}) \cap \bar{B}_1$. Предельная функция $x(\lambda)$ этой последовательности принадлежит $B_\mu(\mathfrak{E}) \cap \bar{B}_1$ и в силу теоремы 1 удовлетворяет равенству (2); что и доказывает теорему.

Полагая $\mathfrak{E} = \{0\}$, получаем

Следствие 2. *Пусть пространство* $\mathfrak{B}$ *и плюс-оператор* $A$ *такие же, как в теореме* 2, $\mu < \nu$ $(\leqslant \alpha)$. *Если*

$$F(B_\nu) \subset B_\mu, \quad (6)$$

*или*

$$A_{12} \text{ — вполне непрерывный оператор}, \quad (7)$$

*то у оператора* $A$ *есть инвариантное подпространство* $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}$.

Замечание. В случае гильбертова $\mathfrak{J}$-пространства $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$ класс $\mathfrak{J}$ совпадает с классом всех неотрицательных подпространств.

Сравним теорему 2 с уже известными результатами. Для доказательства существования у плюс-оператора $A$ инвариантного максимального неотрицательного подпространства условие (7) использовалось, например, в [1], а условие (6) при $0 < \mu < 1$, $\nu = 1$ — в [2], [3]. Методы исследований в указанных работах иные, нежели в настоящей статье.


1. М. Г. Крейн, Об одном новом применении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, ДАН СССР, 154 вып. 5 (1964), 1023—1026.
2. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», М., 1970. 534 с.
3. В. А. Хацкевич, Об одном применении принципа сжатых отображений в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, Функц. анализ 12 вып. 1 (1978), 88—89.
4. Э. Хилле, Р. С. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, М., 1962, ИЛ, 819 с.
5. В. А. Седеров, В. А. Хацкевич, О нормированных $F_\nu$ — пространствах и некоторых классах линейных операторов в этих пространствах, Матем. исслед. 8 вып. 3, Кишинев, (1973), 56—75.
6. Х. Шефер, Топологические векторные пространства, М., 1971, «Мир». 359 с.



Воронежский
государственный университет



Поступила в редакцию
8.04.1981 г.