УДК 517.51

А. Г. Чернявский

О квазианалитичности относительно гиперболического оператора второго порядка

1. Классическая теорема Карлемана — Островского о квазианалитических классах функций (см. [1]) допускает операторные обобщения. Возникающие при этом задачи состоят в отыскании условий на неотрицательную последовательность $\{m_n\}_0^\infty$, при которых для фиксированного оператора H, действующего в некотором функциональном пространстве, и функции $u(x)$, определенной в области $\Omega \subset R^k$, из оценок типа $|H^n u| \leqslant m_n$, $n = 0, 1, \ldots$ и обращения в нуль всех функций $|H^n u(x)|$ и некоторых производных от этих функций на фиксированном подмножестве $\Omega_0 \subset \Omega$ следует, что $u(x) \equiv 0$.

Когда H — оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Вейля и в смысле Римана — Лиувилля, проблема квазианалитичности была исчерпывающе решена в [2]. В ряде работ (см. [3]) исследовалась квазианалитичность относительно дифференциальных операторов H в частных производных.

В настоящей работе изучается задача квазианалитичности относительно гиперболического оператора второго порядка с переменными коэффициентами

$$H = A_{00} D_t^2 - \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} B_i D_{x_i} + B_0 D_t + C_0, \tag{1}$$

$A_{00} > 0$, в слое $\Lambda = [0, T] \times R^N$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in R^N$, с равномерно положительно определенной матрицей $A_{ij}(t, x)$. Полученные результаты обобщают и уточняют результаты работ [4, 5], установленные другим методом и относящиеся к оператору с одной пространственной переменной $H = D_t^2 - D_x^2 + p_1 D_t + p_2 D_x + p_3$. В настоящей работе усилены утверждения, анонсированные в [6].

В доказательствах используется техника операторной квазианалитичности, развитая в [7]. С помощью методов, разработанных в [8], здесь исследуются классы единственности решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

2. Пусть в слое $\Lambda = [0, T] \times R^N$ задан оператор H вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют в слое следующим условиям гладкости: $A_{ij} \in C^{\varkappa+2}$, $B_i \in C^{\varkappa+1}$, $C_0 \in C^{\varkappa}$, $0 \leqslant i \leqslant N$, $0, \leqslant j \leqslant N$, где $\varkappa = [N/2] + 2$ (здесь и далее $[x]$ — целая часть числа x).

Пусть $\lambda(t, x, \xi)$, $\xi \in R^N$ — неотрицательный корень характеристического уравнения

$$A_{00}(t, x)\lambda^2 - \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}(t, x)\,\xi_i\xi_j = 0; \quad \lambda_0 = \sup\{\lambda(t, x, \xi),$$
$$(t, x) \in \Lambda, \ |\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_N^2 = 1\}. \tag{2}$$

С произвольной точкой $P = (t_0, x_0) \in \Lambda$ естественно связан построенный по оператору H конус прошлого Γ_p с вершиной в P: $\Gamma_p = \{(t, x) \in \Lambda, \ |x - x_0| \leqslant \lambda_0(t_0 - t)\}$, являющийся областью зависимости точки P в неоднородной задаче Коши, поставленной для оператора H. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Для того, чтобы из соотношений в конусе* Γ_p $H^n u \in C^2(\Gamma_p)$, $|H^n u(t, x)| \leqslant m_n$, $H^n u(0, x) = D_t H^n u(0, x) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ *следовало, что* $u(t, x) \equiv 0$ *в* Γ_p, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{m_n\}$ *удовлетворяла условию квазианалитичности*

$$\int_1^\infty (\ln T(r)/r^{3/2})\,dr = \infty, \quad T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{m_n}. \tag{3}$$

3. Для доказательства теоремы потребуются следующие вспомогательные утверждения о квазианалитичности относительно операторов в банаховом пространстве.

Лемма 1. *Пусть A есть оператор в банаховом пространстве S с областью определения* $\mathrm{Dom}(A)$, *и при любом комплексном λ на пространстве S определен линейный функционал F_λ. Предположим, что для любого фиксированного вектора $x \in S$ $F_\lambda(x)$ есть целая функция, удовлетворяющая оценке* $|F_\lambda(x)| \leqslant K(1 + |\lambda|^r)\exp(\sigma(x)|\mathrm{Re}\,\lambda|)\,\|x\|$, *где константы K и $r > 0$ не зависят от x, λ, и справедливо представление*

$$F_\lambda(Ax) = \lambda^2 F_\lambda(x) + q(x), \ \lambda \in \mathbf{C}, \ x \in \mathrm{Dom}(A), \tag{4}$$

в котором число $q(x)$ не зависит от λ. Тогда, если выполнено условие квазианалитичности (3), *из соотношений* $x \in \mathrm{Dom}(A^n)$, $\|A^n x\| \leqslant m_n$, $n = 0, 1, \ldots$ *следует, что* $q(x) = 0$, $F_\lambda(x) \equiv 0$.

Доказательство. Итерируя равенство (4), при $\lambda \neq 0$, $x \in \mathrm{Dom}(A^i)$, $i \leqslant n$ получим

$$F_\lambda(x) = F_\lambda(A^n x)\,\lambda^{-2n} - \sum_{i=0}^{n-1} q(A^i x)\,\lambda^{-2(i+1)}. \tag{5}$$

Пусть $\psi(t)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая финитная функция, $\mathrm{supp}\,\psi = [0, 1]$, а $w(\lambda)$ — ее преобразование Лапласа. Очевидно, $w(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, которая при $n = 0, 1, \ldots$ удовлетворяет оценкам $|w(\lambda)| \leqslant C_n/(1 + |\lambda|^n)$, $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$.

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\chi(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} F_\lambda(x) \times w(\lambda)\, e^{-\lambda t} d\lambda$, $t \geqslant 0$. Продифференцируем функцию χ $2n$ раз и подставим в выражение для $\chi^{(2n)}$ значение $F_\lambda(x)$, вычисленное по формуле (5). При этом интегральные члены, отвечающие выражениям $q(A^l x)$, исчезают в силу быстрого убывания $w(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, теоремы Коши и леммы Жордана. В итоге получим

$$\chi^{(2n)}(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} F_\lambda\,(A^n x)\,w(\lambda)\,\lambda^{-2n}(-\lambda)^{2n}\,e^{-\lambda t}d\lambda, \quad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Поэтому $|\chi^{(2n)}(t)| \leqslant \mathrm{const}\,\|A^n x\| \leqslant \mathrm{const}\; m_n,\ t \geqslant 0$. Учитывая, что функция $\chi(t)$ — по теореме Винера — Пэли тождественный нуль при достаточно больших значениях t, из теоремы Карлемана — Островского получим, что $\chi(t) \equiv 0,\ t \geqslant 0$. Применяя теорему Винера — Пэли, получим, что функция $F_\lambda(x)\,w(\lambda)$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ минимальный экспоненциальный тип. Поэтому по теореме о сложении индикаторов [9] в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ $|F_\lambda(x)| \leqslant C(\varepsilon)\exp(\varepsilon|\lambda|)$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

Проводя аналогичные рассуждения для полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ и пользуясь принципом Фрагмена — Линделефа, получим, что $F_\lambda(x)$ — полином по λ степени не выше r. Поскольку при любом натуральном k вектор $x_1 = A^k x$ удовлетворяет оценкам $\|A^n x_1\| \leqslant m_n',\ n \geqslant k,\ m_n' = m_{n-k}$ и последовательность $\{m_n'\}$ удовлетворяет условию (3), то, повторяя для вектора x_1 приведенные выше рассуждения, получим, что функция $F_\lambda(A^k x)$ — полином по λ степени не выше r. В силу (5) при $k \geqslant 2+r$ функция $\lambda^{2k}F_\lambda(x) - \lambda^{2k-2}q(x)$ — полином по λ степени не выше $2k-4$. Поэтому $q(x) = 0$, $F_\lambda(x) \equiv 0,\ \lambda \in \mathbf{C}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве S и пусть x_λ — целая вектор-функция экспоненциального типа со значениями в S. Пусть еще $x_\lambda \in \operatorname{Dom}(A)$, $Ax_\lambda = \lambda^2 x_\lambda + z$, $z \neq 0$; $\|x_\lambda\| \leqslant C(1 + |\lambda|^r)$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $r \geqslant 0$, $r = [r]$, где z есть некоторый не зависящий от λ вектор пространства S. Тогда, если не выполнено условие квазианалитичности (3), существует такой вектор $y \neq 0$, что $\|A^n y\| \leqslant m_n$, $n = 0, 1, \ldots$.*

Доказательство. Функция x_λ имеет положительный экспоненциальный тип. Действительно, в противном случае из принципа Фрагмена — Линделефа следует, что x_λ — векторный полином: $x_\lambda = \lambda^r v_0 + \lambda^{r-1}v_1 + \ldots + v_{r+1}$, $v_i \in S$. Применяя к векторам x_λ оператор A, имеем $\lambda^{r+2}v_0 + \ldots + \lambda^2 v_{r+1} + z = \lambda^r A v_0 + \ldots + A v_{r+1}$, откуда $x_\lambda \equiv 0$, $z = 0$, что противоречит условию леммы. Не ограничивая общности, предположим, что вектор-функция x_λ имеет положительный экспоненциальный тип в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Из теоремы Карлемана—Островского следует существование функции $\psi \in C^\infty(R^1)$, $\psi(t) \not\equiv 0$, $\operatorname{supp}\psi = [0, 1]$, удовлетворяющей при $0 \leqslant t \leqslant 1$ оценкам $|\psi^{(2n)}(t)| \leqslant m_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Пусть $w_1(\lambda)$ есть преобразование Лапласа функции $\psi(t)$. Очевидно, при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ $|w_1(\lambda)| \leqslant m_n \lambda^{-2n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Положим $y(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} x_\lambda w_1(\lambda)(1+\lambda)^{-(r+2)}e^{-\lambda t}d\lambda$, $t \geqslant 0$. Из теоремы Коши, леммы Жордана и свойств функции x_λ имеем

$$A^n y(t) = \int_{-\infty}^{i\infty} \lambda^{2n} x_\lambda w_1(\lambda)(1+\lambda)^{-(r+2)}e^{-\lambda t}d\lambda, \ t \geqslant 0,$$

откуда получается, что $\|A^n y(t)\| \leqslant \mathrm{const}\, m_n$, $t \geqslant 0$, $n = 0, 1, \ldots$. По теореме о сложении индикаторов [9] функция $x_\lambda w_1(\lambda)$ имеет при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ положительный экспоненциальный тип, и в силу теоремы Винера—Пэли $y(t)\not\equiv 0$ при $t\geqslant 0$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть H^* — формально сопряженный с H оператор. Очевидно, H^* — гиперболический оператор, коэффициенты которого при производных второго порядка принадлежат классу $C^{\varkappa+1}$, при производных первого и нулевого порядка — классу $C^{\varkappa}$, где $\varkappa=[N/2]+2$. Поэтому для функции $f\in C^{\infty}(\Lambda)$ $\operatorname{supp} f\subset\Gamma_p$ задача Коши $H^*v_\lambda(t,x)-\lambda^2 v_\lambda(t,x)=f(t,x)$, $(t,x)\in\Gamma_p$, $\lambda\in\mathbf{C}$, $v_\lambda(T,x)=D_t v_\lambda(T,x)=0$, имеет (см. [10]) единственное решение $v_\lambda\in C^2(\Lambda)$, у которого $\operatorname{supp} v_\lambda\subset\Gamma_p$. Оценим рост функции $v_\lambda(t,x)$ по λ. Введя подстановку $v_\lambda^*(t,x,z)=v_\lambda(t,x)\exp(-\lambda z)$, $z\in R^1$ и гиперболический оператор $H'=H^*-D_z^2$, получим, что функция v_λ^* удовлетворяет задаче Коши

$$H'v_\lambda^*(t,x,z)=f(t,x)\exp(-\lambda z),\ (t,x)\in\Lambda,\ z\in R^1,$$
$$v_\lambda^*(T,x,z)=D_t v_\lambda^*(T,x,z)=0. \tag{7}$$

Для произвольной точки $P'=(0,x_1,z_1)\in R^{N+2}$ через $\Gamma^*_{p'}$ обозначим конус будущего $\Gamma^*_{p'}=\{(t,x,z)\in\Lambda\times R^1,\ |x-x_1|^2+|z-z_1|^2\leqslant(\lambda_0')^2t^2$, соответствующий оператору H' (число λ_0' определяется по оператору H' по формуле (2)). Рассмотрим область Γ^* зависимости множества $E=\{(t,x,z):z=t=0,\ |x-x_0|\leqslant\lambda_0 t_0\}$ в неоднородной задаче Коши (7) (см. [10]) : $\Gamma^*=\bigcup\{\Gamma^*_{p'}:P'\in E\}$. Очевидно, $\{(t,x,z):z=0,\ (t,x)\in\Gamma_p\}\subset\Gamma^*$. Пусть $R(h)$ — сечение области Γ^* гиперплоскостью $t=h$. Применяя к задаче (7) в области Γ^* энергетические неравенства для обобщенных производных функции v_λ^* (см. [10]), получаем

$$\max_{0\leqslant|i|\leqslant\nu+1}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{R(t)}|D^i_{t,x,z}v_\lambda^*(t,x,z)|^2\,dxdz\leqslant C_1\max_{0\leqslant|i|\leqslant\nu}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{R(t)}|D^i_{t,x,z}(fe^{-\lambda z})|^2\times$$
$$\times\,dxdz\leqslant C_2(1+|\lambda|^{2\nu})\exp(C_3|\operatorname{Re}\lambda|),\ \nu=[(N+1)/2].$$

Константы C_1, C_2, C_3 могут зависеть здесь только от оператора H, функции f и области Γ^*. Применяя теорему вложения С. Л. Соболева [10] к областям $R(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, имеем при $(t,x,z)\in\Gamma^*:|v_\lambda^*(t,x,z)|\leqslant C_4(1+|\lambda|^{\lambda})\times\exp(C_3|\operatorname{Re}\lambda|)$. Для функции $v_\lambda(t,x)=v_\lambda^*\times\exp(\lambda z)$ при $(t,x)\in\Gamma_p$, $\nu=[(N+1)/2]$ получим оценку

$$|v_\lambda(t,x)|\leqslant C_4(1+|\lambda|^{\nu})\exp(C_5|\operatorname{Re}\lambda|). \tag{8}$$

Для произвольной функции $w\in C(\Gamma_p)$ положим по определению

$$\langle u,w\rangle=\int_{\Gamma_p}u(t,x)\,w(t,x)\,dtdx.$$

Введем банахово пространство $S=C(\Gamma_p)$, семейство функционалов $F_\lambda(\varphi)=\langle\varphi,v_\lambda\rangle$, $\varphi\in S$ и оператор A в S, заданный дифференциальной операцией H вида (1), определенной на функциях $\{u\in C^2(\Gamma_p),\ u(0,x)=D_t u(0,x)=0\}$. Из условия $\operatorname{supp} v_\lambda\subset\Gamma_p$ и формулы Грина следует, что $F_\lambda(Hu)=\lambda^2F_\lambda(u)+\langle u,f\rangle$. Аналитичность функции $F_\lambda(u)$ по λ вытекает из рассуждений, аналогичных приведенным при выводе оценки (8). Применяя лемму 1, получим, что $\langle u,f\rangle=0$. В силу произвольности финитной функции f, $u\equiv 0$ в Γ_p.

Необходимость. Рассмотрим задачу Коши $Hw_\lambda-\lambda^2w_\lambda=1$, $w_\lambda(0,x)=D_t w_\lambda(0,x)=0$. Она имеет (см. [10]) единственное решение $w_\lambda\in C^2(\Gamma_p)$. Рассуждая, аналогично рассуждениям при выводе оценки (8) для v_λ, получим, что функция W_λ также удовлетворяет в конусе Γ_p оценке (8).

Рассмотрим банахово пространство S и замкнутый оператор A в S, определенные при доказательстве достаточности в теореме 1. Семейство x^λ зададим формулой $x_\lambda = W_\lambda$. Из уравнения, аналогичного (7), следует, что x_λ — целая вектор-функция в S, находящаяся в условиях применимости леммы 2, которую используем для завершения доказательства теоремы.

Замечание 1. Аналогичным образом нетрудно показать, что если $s \geqslant 1$ — произвольное фиксированное натуральное число, коэффициенты оператора H удовлетворяют условиям $A_{ij} \in C^{\omega+1}$, B_i, $C_0 \in C^\omega$, где $\omega = [N/2] + s + 1$, и для последовательности $\{m_n\}$ не выполнено условие квазианалитичности (3), то существует функция $u \not\equiv 0$ в Γ_p, у которой $H^n u \in C^{s+1}(\Gamma_p)$, $|D^p H^n u| \leqslant m_n$, $|p| \leqslant s$, $(t, x) \in \Gamma_p$, $H^n u(0, x) = D_t H^n u(0, x) = 0, n=0, 1, \ldots$.

Замечание 2. С помощью результатов [4] теорему 1 и леммы 1, 2 можно без труда переформулировать на случай, когда вместо $\{m_n\}$ задана лакунарная последовательность $\{m(\kappa_i)\}$, где $\{\kappa_i\}$ — возрастающая натуральная последовательность / см. [6]/.

5. Доказанная теорема с помощью методов из статьи [8] применима к изучению классов единственности решений задачи Коши

$$\begin{gathered} Hu(t, x, z) = P(D_z)\, u(t, x, z),\ (t, x) \in \Gamma_p,\ z \in R^h, \\ u(0, x, z) = f_0(x, z),\ D_t u(0, x, z) = f_1(x, z), \end{gathered} \tag{9}$$

где H есть оператор вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 1, $P(z)$ — полином порядка $p > 2$ от h переменных, а f_0, f_1 — заданные функции. Справедлива теорема.

Теорема 2. *Пусть $l(t)$, $t \geqslant 1$ — непрерывная неубывающая положительная функция, для которой $\int_1^\infty r^{-1} (l(r))^{1-p/2}\, dr = \infty$. Тогда совокупность функций $u(t, x, z)$, удовлетворяющих оценке $|u(t, x, z)| \leqslant C \exp(|z_1|^{p'} l \times \times (|z_1|) + \ldots + |z_h|^{p'} l(|z_h|))$, где $(p')^{-1} + 2p^{-1} = 1$, образует класс единственности решений задачи Коши* (9).

С учетом теоремы 1 доказательство теоремы 2 аналогично доказательству результата в работе [8], где рассмотрена задача Коши (9) при $H = D_t$ и использована классическая квазианалитичность относительно оператора $H = D_t$. Когда $P(D_z)$ — эллиптический оператор, теорема 2 дополняет теоремы единственности решений уравнений из работ [11] и [12], которые по одной группе переменных имеют гиперболический тип, а по другой — эллиптический.

1. Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.— М.: ИЛ, 1955.— 268 с.
2. Джрбашян М. М. Расширение квазианалитических классов Данжуа—Карлемана.— Изв. АН Арм.ССР. Математика, 1968, 3, № 3, с. 171—248.
3. Мацаев В. И., Ронкин Л И. Квазианалитические классы функций от нескольких переменных.— Уч. зап. Харьков. ун-та, 1961, 115, вып. 4, с. 49—57.
4. Хрыптун В. Г. Классы функций, квазианалитические относительно линейного гиперболического оператора второго порядка.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, 34, № 5, с. 1127—1141.
5. Хрыптун В. Г. О необходимых условиях операторной квазианалитичности.— Дифференц. уравнения, 1969. 5, № 9, с. 1690—1699.
6. Чернявский А. Г. Об операторной квазианалитичности для функций нескольких переменных.— ДАН СССР, 1979, 244, № 2, с. 296—299.
7. Любич Ю. И., Ткаченко В. А. Критерий квазианалитичности для абстрактных операторов.— ДАН СССР, 1970, 190, № 4, с. 772—774.
8. Чаус Н. Н. О единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1964, 16, № 3, с. 417—421.
9. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 632 с.
10. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.— 830 с.

11. Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н. Обобщенная задача Коши для ультрапараболического уравнения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1967, 31, № 6, с. 1341—1360.
12. Гиндикин С. Г. Об одном обобщении параболических дифференциальных операторов на случай многомерного времени.— ДАН СССР, 1967, 173, № 3, с. 499—502.

Харьковский
государственный университет

Поступила в редакцию
4.03.1980 г.