УДК 517.53

М. Н. Шеремета

О максимальном члене и центральном индексе степенного разложения аналитической в круге функции

1°. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

— аналитическая в $\{z:|z|<1\}$ функция, $M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r<1\}$, а $\mu(r,f)=\max\{|a_n|r^n:n\geqslant 0\}$ и $\nu(r,f)=\max\{n:|a_n|r^n=\mu(r,f)\}$ — соответственно максимальный член и центральный индекс ряда (1). Обозначим

$$\begin{matrix}\rho\\ \lambda\end{matrix}=\overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{\ln\ln\mu(r,f)}{-\ln(1-r)},\quad \begin{matrix}\gamma\\ \delta\end{matrix}=\overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{\ln\nu(r,f)}{-\ln(1-r)}$$

и будем считать, что $\mu(r,f)\to\infty$ при $r\to 1$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|=\infty$. Нетрудно показать, что ρ — порядок функции f, а λ — ее нижний порядок, т. е. в определениях ρ и λ вместо $\mu(r,f)$ можно брать $M(r,f)$.

В [1] показано, что для любой аналитической в $\{z:|z|<1\}$ функции (1) выполняется равенство $\rho=\gamma-1$ и $\lambda\geqslant\delta-1$, причем была предпринята попытка доказать равенство $\lambda=\delta-1$ без каких-либо ограничений на f. Однако, как указал в 1976 г. на Брокпортской конференции по теории функций комплексного переменного Шанкар, равенство $\lambda=\delta-1$ не всегда выполняется. В этой связи возникли задачи: 1) найти точную оценку величины λ сверху в классе всех аналитических в $\{z:|z|<1\}$ функций и 2) выделить классы таких функций, для которых $\lambda=\delta-1$. Постановка второй задачи принадлежит Шанкару [2, с.169].

2°. Обозначим

$$\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n}.$$

Хорошо известно (см., например, [3]), что $\alpha=\rho/(\rho+1)$ (при $\rho=\infty$ считаем $\alpha=1$). А так как $\ln\mu(r,f)=\ln|a_{\nu(r,f)}|+\nu(r,f)\ln r\leqslant\ln|a_{\nu(r,f)}|\leqslant\nu(r,f)^{\alpha+\varepsilon}$ для каждого $\varepsilon>0$ и всех $r\geqslant r_0(\varepsilon)$, то $\lambda\leqslant\delta\alpha\leqslant\delta\rho/(\rho+1)$. Таким образом, в силу неравенства $\lambda\geqslant\delta-1$, в [1] доказанного, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Для любой аналитической в $\{z:|z|<1\}$ функции*

$$\delta-1\leqslant\lambda\leqslant\delta\rho/(\rho+1). \tag{2}$$

Покажем, что оценка сверху в (2), вообще говоря, не улучшаемая. Воспользуемся тем, что если для аналитической в $\{z:|z|<1\}$ функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n},\ a_n\neq 0, \tag{3}$$

величина $\varkappa_n = |a_{n-1}/a_n|^{1/(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \uparrow 1$ при $n_0 \leqslant n \to \infty$, то при $\varkappa_n \leqslant r < \varkappa_{n+1}$ выполняются равенства $\mu(r, f) = |a_n| r^{\lambda_n}$ и $\nu(r, f) = \lambda_n$. Рассмотрим функцию $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{\lambda_n}} z^{\lambda_n}$, $\lambda_n = 2^{2^n}$, аналитическую в $\{z: |z| < 1\}$, для которой $\varkappa_n = \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_{n-1}}}\right\} \uparrow 1$ при $n \to \infty$. Для функции f_1 имеем $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$ и, поскольку $1 - r \sim \ln(1/r)$ при $r \to \infty$, то

$$\delta = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{-\ln(1-\varkappa_{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{-\ln\ln \frac{1}{\varkappa_{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln(\sqrt{\lambda_{n+1}} + \sqrt{\lambda_n})} = 1$$

и

$$\gamma = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{-\ln(1-\varkappa_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln(\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_{n-1}})} = 2,$$

так что $\rho = \alpha/(1-\alpha) = 1 = \gamma - 1$. Далее покажем, что $\lambda = 1/2$, т. е. покажем точность оценки сверху в (2). С этой целью найдем

$$\lambda(n) = \min_{\varkappa_n \leqslant r \leqslant \varkappa_{n+1}} \frac{\ln\ln \mu(r, f)}{-\ln\ln \frac{1}{r}} = \min_{\varkappa_n \leqslant r \leqslant \varkappa_{n+1}} \frac{\ln(\sqrt{\lambda_n} + \lambda_n \ln r)}{-\ln\ln \frac{1}{r}} =$$

$$= \min\{\psi(t) : t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}\} - 1,$$

где $t_n = \ln^{-1}(1/\varkappa_n)$, а $\psi(t) = \ln(t\sqrt{\lambda_n} - \lambda_n)/\ln t$. Легко видеть, что $\psi(t_n) = 3/2 + o(1)$ и $\psi(t_{n+1}) = 3/2 + o(1)$ при $n \to \infty$, а $\psi'(t) = \varphi(t) t^{-1} \times (t - \sqrt{\lambda_n})^{-1} \ln^{-2} t$, где $\varphi(t) = t \ln t - (t - \sqrt{\lambda_n}) \ln(t\sqrt{\lambda_n} - \lambda_n)$. Так как $\varphi(t_n) = 2^{2^{n-1}} 2^{n-1} \ln 2 (1 + o(1))$, $\varphi(t_{n+1}) = -2^{2^n} 2^{n-1} \ln 2 (1 + o(1))$ при $n \to \infty$, а

$$\varphi'(t) = \ln \frac{t}{\sqrt{\lambda_n} t - \lambda_n} \leqslant \ln \frac{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_{n-1}}}{\sqrt{\lambda_n \lambda_{n-1}}} < 0, \ t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1},$$

то функция φ имеет единственный нуль $t_n^* \in [t_n, t_{n+1}]$, т. е. t_n^* — единственная точка экстремуму функции ψ. Поскольку φ — убывающая функция, а $t - \sqrt{\lambda_n} > 0$ при $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$, то при переходе через точку t_n^* функция ψ' меняет знак с (+) на (—), т. е. t_n^* — точка максимума функции ψ. Таким образом, $\min\{\psi(t) : t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}\} = 3/2 + o(1)$, $\lambda(n) = 1/2 + o(1)$ при $n \to \infty$ и $\lambda = 1/2$, что и требовалось показать.

3°. В [4] показано, что для целой функции порядка ρ и нижнего порядка λ, имеющей представление (3), выполняется неравенство $\lambda \leqslant \rho d$, где $d = \varliminf_{n\to\infty} \ln \lambda_n / \ln \lambda_{n+1}$. На основании неверного равенства $\lambda = \delta - 1$ в [1] утверждалось, что для функции (3), аналитической в $\{z: |z| < 1\}$, выполняется неравенство $1 + \lambda \leqslant (1 + \rho) d$. Однако, как указывает пример функции f_1, это соотношение не имеет места, так как в данном случае $\lambda = \frac{1}{2}$, $\rho = 1$ и $d = \frac{1}{2}$. Пользуясь методом из [4] (см. также [1]) и оценкой $\lambda \leqslant \delta\rho/(1 + \rho)$, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Для аналитической в $\{z : |z| < 1\}$ функции (3) выполняется неравенство $\lambda \leqslant \rho d$.*

Пример функции f_1 указывает на неулучшаемость неравенства.

4°. Рассмотрим класс функций (1), аналитических в $\{z:|z|<1\}$, для которых $\varkappa_n = |a_{n-1}/a_n| \uparrow 1$ при $n_0 \leqslant n \to \infty$. Для таких функций $\lambda = \beta/(1-\beta)$. Это неравенство следует из результатов статьи [5], где получено непосредственное обобщение рядов (1) — рядов Дирихле с неотрицательными возрастающими к ∞ показателями, имеющих абсциссу абсолютной сходимости равную 0. Казалось бы, что для такого класса аналитических в $\{z:|z|<1\}$ функций (1) выполняется равенство $\lambda = \delta - 1$. Однако для функции $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}$, где $\varkappa_n = \exp\left\{-\left(k_m + \frac{j-k_m}{k_{m+1}}\right)^{-3/4}\right\}$ при $k_m \leqslant j < k_{m+1}$, а $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и $k_m = 2^{3^m}$ $(m>2)$ условие $\varkappa_n \uparrow 1$ $(n\to\infty)$ выполняется, но можно показать, что $\lambda \geqslant 1 > \frac{1}{3} = \delta - 1$. Заметим, что для функции f_2 не выполняется также условие

$$\ln\ln\sqrt[n]{|a_n|} \sim \ln\ln\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \quad (n\to\infty). \tag{4}$$

Если же $\varkappa_n = |a_{n-1}/a_n| \uparrow 1$ и выполняется условие (4), то $\lambda = \beta/(1-\beta)$ и $\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln\ln\frac{1}{\varkappa_n}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln\ln\sqrt[n]{|a_n|}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n - \ln\ln|a_n|} = \frac{1}{1-\beta}$, так что $\lambda = \delta - 1$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если для аналитической в* $\{z:|z|<1\}$ *функции* (1) $|a_{n-1}/a_n| \uparrow 1$ *при* $n\to\infty$ *и выполнено условие* (4), *то* $\lambda = \delta - 1$.

Условия теоремы 3 выполняются, если $\ln|a_n| = n^{\omega(n)}$ при $n \geqslant n_0$, где ω — положительная на $[x_0, \infty)$ функция такая, что $0 < \beta \leqslant \omega(x) \leqslant \alpha < 1$, $\omega(x) + \omega'(x)\,x\ln x > 0$ при $x \geqslant x_0$, $\omega'(x)\,x \to 0$ при $x\to\infty$ и функция $x^{\omega(x)}$ — вогнутая на $[x_0, \infty)$. Примером такой функции ω мо ет служить $\omega(x) = A + B\sin(\ln\ln x)$ с соответствующим подбором постоянных A и B.

1. Sons L. R. Regularity of growth and gaps.— J. Math. Anal and Appl., 1968, **24**, p. 296—306.
2. Miller S. S. Problems in Complex function theory.— Complex Anal. Proc. S. U. N. Y. Brockport Conf., New York — Basel, 1978, p. 167—177.
3. Говоров Н. В. О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения.— Труды Новочерк. политехн. ин-та, 1959, **100**, с. 111—115.
4. Whittaker J. M The lower order of integral functions.— J. London Math. Soc., 1933, **8**, p. 20—27.
5. Бойчук В. С. О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле.— В кн.: Математический сборник, Киев: Наук. думка, 1976, с. 238—240.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
22.04.1980 г.