УДК 517.948

Б. А. Шувар, М. И. Копач

О двусторонних интегральных неравенствах типа Вольтерра со многими независимыми переменными

Различные классы операторных неравенств, в частности интегральные неравенства исследовались многими авторами / см., напр. [1—4]/. В условиях теорем об операторных неравенствах одним из существенных ограничений является предположение о монотонности правых частей соответствующих уравнений.

В настоящей работе результаты из [3] о двусторонних интегральных неравенствах типа Вольтерра с одной независимой переменной распространены на случай, когда неизвестная функция в соответствующем уравнении содержит многие независимые переменные. Как и в [3] не предполагается, вообще говоря, что правые части соответствующих уравнений монотонны. Как частные случаи получаются, например, известное неравенство Вендроффа [4], а также результат из [5].

Рассмотрим уравнение вида

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))\, ds, \tag{1}$$

где $f(t) : [t_0, T] \to E$, $k(t, s, x(s)) : [t_0, T] \times [t_0, T] \times E \to E$ — непрерывные функции по совокупности аргументов, E — полуупорядоченное пространство Банаха, $[t_0, T] \in R^n$ — отрезок в n-мерном евклидовом пространстве. Обозначим пространство непрерывных на $[t_0, T]$ функций со значениями из E через $C(E, [t_0, T])$.

Предположим, что задан непрерывный по совокупности аргументов оператор $K(t, s, y, z) : [t_0, T] \times [t_0, T] \times E \times E \to E$, такой, что

$$K(t, s, x, x) = k(t, s, x)\ \forall t,\ s \in [t_0, T],\ x \in E. \tag{2}$$

Пусть выполнены следующие условия: 1) пространство E полуупорядочено с помощью телесного конуса K; как обычно используем обозначения (см., напр. [1]) : $x \ll y$, если $y - x \in \operatorname{int}\overline{K}$; $x \leqslant y$, если $y - x \in \overline{K}$; 2) $K(t, s, x, y)$ не убывает по x, а по y не возрастает; 3) заданы функции $p(t)$, $q(t) \in C(E, [t_0, T])$, удовлетворяющие на $[t_0, T]$ неравенствам

$$\begin{gathered} p(t) \ll f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, s, p(s), q(s))\, ds, \\ q(t) \gg f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, s, q(s), p(s))\, ds. \end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1) — 3), *то любое непрерывное на* $[t_0, T]$ *решение уравнения* (1) *удовлетворяет на* $[t_0, T]$ *двусторонним оценкам*

$$p(t) \ll x(t) \ll q(t). \tag{4}$$

Доказательство. При $t = t_0$ очевидно, что $p(t_0) \ll x(t_0) \ll q(t_0)$. Пусть D_0 — множество точек из $[t_0, T]$, в которых хотя бы одно из соотношений (4) не выполняется. Обозначим $d_0 = \inf \rho(t_0, D_0)$. В силу того, что в точке t_0 $p(t_0) \ll x(t_0) \ll q(t_0)$, из непрерывности $p(t)$, $x(t)$, $q(t)$ следует $d_0 > 0$. Пусть $t_1 \in (t_0, T]$ такое, что $\rho(t_0, t_1) = d_0$. Если бы точка t_1 не принадлежала D_0, то мы имели бы $p(t_1) \ll x(t_1) \ll q(t_1)$, и поэтому в силу непрерывности $p(t)$, $x(t)$, $q(t)$ нашлась бы окрестность точки t_1, в которой $p(t) \ll x(t) \ll q(t)$, и $\inf \rho(t_0, D_0)$ не мог бы достигаться при $t = t_1$. Таким образом, $t_1 \in D_0$. В точке t_1 не имеет места хотя бы одно из соотношений (4), поскольку $t_1 \in D_0$, но выполнены соотношения $p(t_1) \leqslant x(t_1) \leqslant q(t_1)$ так как

$$p(t_1) = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t \in [t_0, T]/D_0}} p(t) \leqslant \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t \in [t_0, T]/D_0}} x(t) = x(t_1) \leqslant \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t \in [t_0, T]/D_0}} q(t) = q(t_1)$$

в силу допущения и непрерывности $p(t)$, $x(t)$, $q(t)$. С другой стороны при $t=t_1$, имеем

$$p(t_1) \ll f(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} K(t, s, p(s), q(s))\, ds \leqslant f(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} K(t_1, s, x(s), x(s))\, ds = x(t_1) \leqslant$$
$$\leqslant f(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} K(t_1, s, q(s), p(s))\, ds \ll q(t_1).$$

Этим теорема доказана, поскольку полученные неравенства находятся в противоречии с допущением.

В случае, если $K(t, s, p, q)$ не зависит от q, из теоремы 1 вытекает результат, близкий к одному результату из [2] (см. теорема III, § 17).

Если $n = 1$, т. е. если интеграл в (1) — одномерный, из теоремы 1 вытекает результат, содержащийся в теореме 18.1 из [3]. Рассмотрим уравнение (1) без предположения, что выполнено условие 1), т. е. будем допускать, что конус, при помощи которого полуупорядочено банахово пространство E, не обязательно является телесным.

Теорема 2. *Пусть: 1) выполнено условие 2) теоремы 1; 2) $K(t, s, p, q)$ при $t, s \in [t_0, T]$, $p, q, y \in E$ удовлетворяет условиям Липшица*

$$\|K(t, s, p, q) - K(t, s, y, q)\| \leqslant M\|p - y\|, \quad \|K(t, s, p, q) - K(t, s, p, y)\| \leqslant$$
$$\leqslant M\|q - y\|; \tag{5}$$

3) *заданы $u(t)$, $v(t) \in C(E, [t_0 T])$, для которых на $[t_0, T]$ выполнены неравенства*

$$u(t) \leqslant f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, s, u(s), v(s))\, ds, \quad v(t) \geqslant f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, s, v(s), u(s))\, ds. \tag{6}$$

Тогда единственное, непрерывное на $[t_0, T]$ решение $x(t)$ уравнения (1) удовлетворяет при $t \in [t_0, T]$ оценкам

$$u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t). \tag{7}$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 22.1 из [3] для $t \in R^1$.

Если конус $\overline{K}$ — телесен, условие Липшица в теореме 2 можно заменить другими предположениями.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 1)—2) теоремы 1, а также условие 3) теоремы 2). Пусть, кроме того, система*

$$y(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, s, y(s), z(s))\, ds, \quad z(t) = f(t) \int_{t_0}^{t} K(t, s, z(s), y(s))\, ds \tag{8}$$

имеет на $[t_0, T]$ единственное решение $(y(t), z(t))$, причем это решение такое, что $y(t) = z(t) = x(t)\ \forall t \in [t_0, T]$. Тогда единственное непрерывное на $[t_0, T]$ решение $x(t)$ уравнения (1) удовлетворяет на $[t_0, T]$ оценкам (7).

Доказательство. Неравенства (7) выполнены по крайней мере при $t = t_0$. Обозначим через D множество тех $t \in [t_0, T]$, для которых оценки (7) не имеют места. Пусть $d = \inf\{t_0, D\}$ и t_1 одна из точек, что при $t = t_1$ inf достигается. Очевидно $t_1 \in [t_0, T]/D$. Обозначим

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t_1} K(t, s, x(s), x(s))\, ds, \tag{9}$$

где $x(t)$ решение (1).

В силу условий теоремы систему (8) можно переписать в виде

$$y(t)=\varphi(t)+\int_{t_1}^{t} K(t, s, y(s), z(s))\,ds, \quad z(t)=\varphi(t)+\int_{t_1}^{t} K(t, s, z(s), y(s))\,ds, \tag{10}$$

где $t \in [t_1, T]$. Положим

$$p(t)=\inf\{\varphi(t), u(t), z(t)\}-a, \quad q(t)=\sup\{\varphi(t), u(t), z(t)\}+a, \tag{11}$$

где a — внутренний элемент конуса $\bar{K}$. Очевидно, что на некотором промежутке $[t_1, t_2] \subseteq [t_1, T]$ функции $p(t)$, $q(t)$, определенные согласно (11), удовлетворяют неравенствам (3).

Способом, аналогичным способу доказательства леммы 1 из [1], можно доказать, что последовательности $\{p_n(t)\}$, $\{q_n(t)\}$, определенные при помощи формул

$$p_0(t)=p(t), \quad q_0(t)=q(t), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} p_{n+1}(t)=\varphi(t)+\int_{t_0}^{t} K(t, s, p_n(s), q_n(s))\,ds, \\ q_{n+1}(t)=\varphi(t)+\int_{t_0}^{t} K(t, s, q_n(s), p_n(s)\,ds \ (n=0, 1, \ldots) \end{gathered} \tag{13}$$

сходятся равномерно на $[t_1, t_2]$ соответственно снизу и сверху к $x(t)$ — непрерывному решению на $[t_1, t_2]$ уравнения (1) (ср. также [3]). При этом $p(t) \ll x(t) \ll q(t)\ \forall t \in [t_1, t_2]$. С другой стороны при $t \in [t_1, t_2]$ в силу допущения

$$u(t) \leqslant \varphi(t)+\int_{t_1}^{t} K(t, s, u(s), v(s))\,ds, \quad v(t) \geqslant \varphi(t)+\int_{t_1}^{t} K(t, s, v(s), u(s))\,ds. \tag{14}$$

Из (11) следует $u(t)$, $v(t) \in [p(t), q(t)]\ \forall t \in [t_1, t_3]$, где $t_3 \in [t_1, T]$. Без ограничения общности можно считать, что $t_3=t_2$, так как в противном случае в качестве t_2 можно было бы взять любое $t \in (t_1, T]$ такое, что $t<t_2$, $t<t_3$. Определим на $[t_1, t_2]$ последовательности $\{u_n(t)\}$, $\{v_n(t)\}$ по формулам

$$u_0(t)=u(t), \quad v_0(t)=v(t), \tag{15}$$

$$\begin{gathered} u_{n+1}(t)=\varphi(t)+\int_{t_1}^{t} K(t, s, u_n(s), v_n(s))\,ds, \\ v_{n+1}(t)=\varphi(t)+\int_{t_1}^{t} K(t, s, v_n(s), u_n(s))\,ds \quad (n=0, 1, \ldots). \end{gathered} \tag{16}$$

Легко убедиться в справедливости соотношений

$$p_n(t) \leqslant u_n(t) \leqslant q_n(t), \quad p_n(t) \leqslant v_n(t) \leqslant q_n(t) \tag{17}$$

при $n=0, 1, \ldots, t \in [t_1, t_2]$. Поэтому $u_n(t) \rightrightarrows x(t)$, $v_n(t) \rightrightarrows x(t)$. Так как нетрудно проверить непосредственно, учитывая (14) и условия теоремы, что

$$u_n(t) \leqslant u_{n+1}(t), \quad v_{n+1}(t) \geqslant v_n(t), \quad (t \in [t_1, t_2],\ n=0, 1, \ldots),$$

то на $[t_1, t_2)$ неравенства (7) выполнены. Это противоречит выбору точки t_1. Теорема доказана.

Рассмотрим в R^1 уравнение вида

$$x(t_1, \ldots, t_n) = c + \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_1} \beta(\xi_1, \ldots, \xi_n) g(x(\xi_1, \ldots, \xi_n)) d\xi_1 \ldots d\xi_n, \quad (18)$$

где $c = \mathrm{const}$, $\beta(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — непрерывная неотрицательная функция, $g(x)$ — неубывающая непрерывная строго положительная функция.

Теорема 4. *Из неравенства*

$$u(t_1, \ldots, t_n) \leqslant c + \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_1} \beta(\xi_1, \ldots, \xi_n) g(x(\xi_1, \ldots, \xi_n)) d\xi_1 \ldots d\xi_n, \quad (19)$$

где $u(t_1, \ldots, t_n)$, *непрерывно вытекает оценка*

$$u(t_1, \ldots, t_n) \leqslant G^{-1} \Big[G(c) + \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_1} \beta(\xi_1, \ldots, \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n, \quad (20)$$

если существует n-раз непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция $G(u)$, *такая, что*

$$\frac{1}{g(z)} \frac{\partial^n z}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} \geqslant \frac{\partial^n G(z)}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}, \quad (21)$$

для любой функции z, для которой существует непрерывная производная $\partial^n z / \partial t_1 \ldots \partial t_n$.

При этом предполагаем, что выражение в квадратных скобках в (20) *принадлежит области существования функции* G^{-1}.

Для доказательства рассмотрим уравнение

$$z(t_1, \ldots, t_n) = c + \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_1} \beta(\xi_1, \ldots, \xi_n) g(z(\xi_1, \ldots, \xi_n)) d\xi_1 \ldots d\xi_n. \quad (22)$$

Дифференцируя это равенство, получаем $\frac{1}{g(z)} = \frac{\partial^n z}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} = \beta(t_1, \ldots, t_n)$. Отсюда, используя (21), находим $\frac{\partial^n Gz}{\partial t_1, \ldots, \partial t_n} \leqslant \beta(t_1, \ldots, t_n)$. Интегрируя это соотношение и учитывая свойства функции G, приходим к неравенству

$$z \leqslant G^{-1} \left[G(c) + \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_1} \beta(\xi_1, \ldots, \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n \right].$$

На основании теоремы 3 $u \leqslant z$, в сопоставлении с предыдущим неравенством приводит к заключению о справедливости неравенства (20).

При $n = 2$, $g(z) = z$ из теоремы 4 вытекает неравенство Вендроффа [4]. Если же $n = 2$, то условию (21) удовлетворяет функция $\int_c^z \frac{d\lambda}{g(\lambda)} \; (z > c)$.

Следствие 2. [5]. Если

$$u(t_1, t_2) \leqslant c + \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \beta(\xi_1, \xi_2) g(u(\xi_1, \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2,$$

где $c \geqslant 0$, $u(t_1, t_2) \geqslant 0$, $\beta(t_1, t_2) \geqslant 0$, $g(u)$ — непрерывная неубывающая строго положительная функция, то при условии, что $G(c) + \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \beta(\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 d\xi_2$

принадлежит области существования функции $G^{-1}(x)$ обратной функции $G(x)$, определенной при помощи формулы $G(x)=\int\limits_c^x \frac{ds}{g(s)}$ $(x \geqslant c)$, имеет место оценка $u(t_1, t_2) \leqslant G^{-1}\left[G(c)+\int\limits_0^{t_2}\int\limits_0^{t_1} \beta(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2\right]$. Подобным способом можно получить и другие известные и новые оценки решений интегральных неравенств типа Вольтерра с многими независимыми переменными (ср. [2, 4]). Оценка (20) и получающиеся из нее частные неулучшаемы только в том случае, если соотношение (21) — точное равенство на единственном непрерывном решении x уравнения (18).

В качестве примера рассмотрим неравенство

$$u(x, y) \leqslant c+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} \beta(t, s)\, u^{m+1}(t, s)\, dt ds \ \ (m>0,\ c>0).$$

В этом случае $g(z)=z^{m+1}$ и можно взять $G(z)=-\frac{1}{m}(z^{-m}-c^{-m})$, $G(z)$ удовлетворяет неравенству (21).

Пусть $\beta(x, y)=e^{a(x-x_0)+b(y-y_0)}$. При $a>0$, $b>0$, $x \in [x_0, A]$, $(x_0<A=\mathrm{const}<\infty)$ и $y \in [y_0, B]$, где $B<y_0+\frac{1}{b}\ln\left(\frac{ab}{mc^m(e^{a(x-x_0)}-1)}+1\right)$, из теоремы 4 следует

$$u(x, y) \leqslant \left[\frac{abc^m}{ab-mc^m(e^{a(x-x_0)}-1)(e^{b(y-y_0)}-1)}\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{23}$$

Если же $a<0$, $b<0$ и $ab>mc^m$, то оценка (23) имеет место при $x \in [x_0, A]$, $y \in [y_0, B]$ для произвольных $A>x_0$, $B>y_0$.

Пусть в уравнении (22) $\beta(x, y)=\beta_1(x, y)-\beta_2(x, y)$, $\beta_1(x, y) \geqslant 0$, $\beta_2(x, y) \geqslant 0$. Если заданы $u(x, y)$, $v(x, y) \in C(R^1, R^1 \times R^1)$, удовлетворяющие неравенствам

$$u(x, y) \leqslant c+\int\limits_0^y\int\limits_0^x \beta_1(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi d\eta-\int\limits_0^y\int\limits_0^x \beta_2(\xi, \eta)\, v(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

$$v(x, y) \geqslant c+\int\limits_0^y\int\limits_0^x \beta_1(\xi, \eta)\, v(\xi, \eta)\, d\xi d\eta-\int\limits_0^y\int\limits_0^x \beta_2(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \ \ (c \geqslant 0),$$

то на основании теоремы 2 можно получить неравенство

$$u(x, y) \leqslant c \cdot e^{\int\limits_0^y\int\limits_0^x [\beta_1(\xi, \eta)-\beta_2(\xi, \eta)] d\xi d\eta},$$

являющееся обобщением неравенства Вендроффа. Если $\beta_2(x, y)=0\ \forall x, y>0$, то полученное неравенство совпадает с неравенством Вендроффа.

1. Бондаренко В. А. Интегральные неравенства для уравнения Вольтерра в банаховом пространстве с конусом.— Мат. заметки, 1971, 9, № 2, с. 151—160.
2. Walter W. Differential and integral incqualities.— Berlin ets: Springer 1970.— 355 p.
3. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применение.— Киев: Наук. думка, 1980.— 267 с.
4. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.— М.: Мир, 1965.— 276 с.
5. Gutowski R. Etude d'une inegalite integrale non lineaire en deux variables.— Ann. Pol. math., 1978, 35, N 3, p. 247—252.

Киевский пединститут

Поступила в редакцию 22.01.1981 г.