УДК 517.949.2

И. М. Черевко

Об интегральных многообразиях сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа

Настоящая работа посвящена построению интегральных многообразий линейных и нелинейных дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами нейтрального типа, содержащих малый параметр при производных. Изучаются также некоторые свойства интегральных многообразий. Для дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа эти вопросы исследовались в [1—3].

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему дифференциально-разностных уравнений вида

$$\dot{y} = A(t)\,y(t) + B(t)\,z(t) + h(t),$$

$$\varepsilon\dot{z}(t) = C(t)\,z(t) + D(t)\,z(t-\varepsilon\Delta) + \varepsilon P(t)\,\dot{z}(t-\varepsilon\Delta) +$$

$$+\,\varepsilon\left\{F(t)\,y(t) + G(t)\,y(t-\theta) + \varepsilon\frac{d}{dt}[R(t)\,y(t-\theta)] + H(t)\right\}, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$, $\Delta > 0$, y, h — n-векторы, z, H — m-векторы, A — $n\times n$-матрица, C, D, P — $m\times m$-матрицы, B — $n\times m$-матрица, F, G, R — $m\times n$-матрицы.

Предположим, что выполняются следующие условия. 1) Функции A, B, h, C, D, P, F, G, R, $\frac{dR}{dt}$, H непрерывные и равномерно ограничены для всех $t \in (-\infty, \infty)$. 2) Все корни характеристического уравнения

$$\operatorname{Det}(\lambda E - C - De^{-\lambda\Delta} - \lambda Pe^{-\lambda\Delta}) = 0$$

при $t \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -2\alpha < 0$.

1. Докажем теорему существования интегрального многообразия.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1), 2). *Тогда можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для каждого* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *будет существовать интегральное многообразие системы* (1), *определяемое соотношением*

$$z(t) = L(t, \varepsilon)\,y(t) + g(t, \varepsilon), \tag{2}$$

где $L(t, \varepsilon)$, $g(t, \varepsilon)$ *равномерно ограничены при* $t \in (-\infty, \infty)$ *и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} L(t, \varepsilon) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(t, \varepsilon) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим однородное уравнение

$$\varepsilon\dot{z}(t) = C(t)\,z(t) + D(t)\,z(t-\varepsilon\Delta) + \varepsilon P(t)\,\dot{z}(t-\varepsilon\Delta). \tag{3}$$

При выполнении условий 1), 2) имеют место оценки [4, 5]*

$$|Z(t, s)| \leqslant Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}, \quad |\dot{Z}(t, s)| \leqslant \frac{K}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}, \tag{4}$$

* В точках разрыва $Z(t, s)$ под $\dot{Z}(t, s)$ понимается правосторонняя производная.

где $Z(t, s)$ — решение уравнения (3) с начальными условиями

$$Z(t, s) = 0 \text{ при } t < s, \; Z(s, s) = E,$$

а точка обозначает производную по t.

Будем строить функции $L(t, \varepsilon)$, $g(t, \varepsilon)$ методом последовательных приближений. Запишем решение системы $\dot{y}(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$ в виде $Y_0(t, t_0)\,y_0 + \eta_0(t, t_0)$, где $Y_0(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы и $\eta_0(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} Y_0(t, s)\,h(s)\,ds$. Определим

$$L_1(t, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{t} Z(t, \sigma)\Big\{F(\sigma)\,Y_0(\sigma, t) + G(\sigma)\,Y_0(\sigma - \theta, t) + \varepsilon\frac{d}{d\sigma}[R(\sigma)\,Y_0(\sigma - \theta, t)]\Big\}\,d\sigma,$$

$$g_1(t, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{t} Z(t, \sigma)\Big\{F(\sigma)\,\eta_0(\sigma, t) + G(\sigma)\,\eta_0(\sigma - \theta, t) + \varepsilon\frac{d}{d\sigma}[R(\sigma)\,\eta_0(\sigma - \theta, t)] + H(\sigma)\Big\}\,d\sigma.$$

Обозначим $\beta = \sup|A(t)|$, тогда при $\sigma < t$ и $\varepsilon < \dfrac{\alpha}{2\beta}$

$$|Y_0(\sigma, t)| \leqslant e^{\beta(t-\sigma)},$$

$$|L_1(t, \varepsilon)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{t} Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-\sigma)}\{|F|\,e^{\beta(t-\sigma)} + |G|\,e^{\beta(t-\sigma+\theta)}\}\,d\sigma +$$

$$+\varepsilon\,|Z(t, t)\,R(t)\,Y_0(t-\theta, t) - \lim_{\xi\to-\infty} Z(t, \xi)\,R(\xi)\,Y_0(\xi-\theta, t)| + \left|\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\frac{d}{d\sigma}Z(t, \sigma)\right]\times\right.$$

$$\left.\times R(\sigma)\,Y_0(\sigma-\theta, t)\right| \leqslant \frac{K_1\varepsilon}{\alpha - \varepsilon\beta} + \frac{K\varepsilon}{\alpha-\varepsilon\beta}e^{\beta\theta}\sup|R| + \varepsilon\cdot\sup|R|\,e^{\beta\theta} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left[\frac{2K_1}{\alpha} + \sup|R|\left(1 + \frac{2K}{\alpha}\right)e^{\beta\theta} \equiv \varepsilon K_2.\right.$$

Аналогичным способом находим

$$|\eta(\sigma, t)| \leqslant \frac{\sup|h(t)|}{\beta}e^{\beta(t-\sigma)} \text{ при } \sigma < t \text{ и } |g_1(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon K_3.$$

Предположим, что L_{n-1}, g_{n-1} уже определены и верны оценки $|L_{n-1}(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon K_4$, $|g_{n-1}(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon K_5$. Рассмотрим систему

$$\dot{y}(t) = [A(t) + B(t)\,L_{n-1}(t, \varepsilon)]\,y(t) + B(t)\,g_{n-1}(t, \varepsilon) + h(t).$$

Решение этой системы запишем в виде $Y_{n-1}(t, t_0, \varepsilon)y_0 + \eta_{n-1}(t, t_0, \varepsilon)$, где Y_{n-1} — фундаментальная матрица решений однородной системы, а

$$\eta_{n-1} = \int\limits_{t_0}^{t} Y_{n-1}(t, s, \varepsilon)\,[B(s)\,g_{n-1}(s, \varepsilon) + h(s)]\,ds.$$

Следовательно, $Y_{n-1}(\sigma, t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$Y_{n-1}(\sigma, t, \varepsilon) = E + \int\limits_{t}^{\sigma}[A(\tau) + B(\tau)\,L_{n-1}(\tau, \varepsilon)]\,Y_{n-1}(\tau, t, \varepsilon)\,d\tau.$$

Обозначая $\gamma = \sup|B(t)|$ и применяя неравенство Гронуолла — Беллмана, имеем

$$|Y_{n-1}(\sigma, t, \varepsilon)| \leqslant e^{(\beta+\varepsilon\gamma K_4)(t-\sigma)} \tag{5}$$

Определим

$$L_n(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} Z(t, \sigma)\Big\{F(\sigma) Y_{n-1}(\sigma, t) + G(\sigma) Y_{n-1}(\sigma-\theta, t) + \\ + \varepsilon \frac{d}{d\sigma}[R(\sigma) Y_{n-1}(\sigma-\theta, t)]\Big\} d\sigma,$$

$$g_n(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} Z(t, \sigma)\Big\{F(\sigma)\eta_{n-1}(\sigma, t) + G(\sigma)\eta_{n-1}(\sigma-\theta, t) + \\ + \varepsilon \frac{d}{d\sigma}[R(\sigma)\eta_{n-1}(\sigma-\theta, t)] + H(\sigma)\Big\} d\sigma. \tag{6}$$

Рассмотрим $\varepsilon < \min\left\{\frac{\alpha}{2\beta}, \frac{\beta}{2\gamma K_4}\right\}$, тогда $\alpha - \varepsilon(\beta + \varepsilon\gamma K_4) < \frac{\alpha}{4}$. Используя оценку (5), с учетом выбора ε из (6) получаем

$$|L_n(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon\left[\frac{K_1}{\alpha - \varepsilon(\beta + \delta\gamma K_4)} + \sup|R|\, e^{(\beta+\varepsilon\gamma K_4)\theta}\left(1 + \frac{K}{\alpha - \varepsilon(\rho + \varepsilon\gamma K_4)}\right)\right] \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\left[\frac{4K_1}{\alpha} + \sup|R|\, e^{\frac{3}{2}\theta}\left(1 + \frac{4K}{\alpha}\right)\right]. \tag{7}$$

Так же как и выше, используя оценку $|\eta_{n-1}(\sigma, t, \varepsilon)| \leqslant K_6 e^{(\beta+\varepsilon\gamma K_4)(t-\sigma)}$, получаем

$$|g_n(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon K_5. \tag{8}$$

Рассмотрим разность

$$Y_n(\sigma, t) - Y_{n-1}(\sigma, t) = \int_t^{\sigma} [(A + BL_n) Y_n - (A + BL_{n-1}) Y_{n-1}]\, d\tau =$$

$$= \int_t^{\sigma} A(Y_n - Y_{n-1})\, d\tau + \int_t^{\sigma} B(L_n - L_{n-1}) Y_n d\tau + \int_t^{\sigma} BL_{n-1}(Y_n - Y_{n-1})\, d\tau.$$

Обозначим $\delta_n = \sup|L_n - L_{n-1}|$, тогда

$$|Y_n - Y_{n-1}| \leqslant \beta\int_{\sigma}^{t} |Y_n - Y_{n-1}|\, d\tau + \gamma\delta_n \int_{\sigma}^{t} Y_n d\tau + \varepsilon\gamma K_4 \int_{\sigma}^{t} |Y_n - Y_{n-1}|\, d\tau \leqslant \\ \leqslant (\beta + \varepsilon\gamma K_4)\int_{\sigma}^{t} |Y_n - Y_{n-1}|\, d\tau + \frac{\gamma\delta_n}{\beta}\cdot e^{\beta(t-\sigma)}.$$

Решая это неравенство, получаем

$$|Y_n(\sigma, t) - Y_{n-1}(\sigma, t)| \leqslant \frac{\gamma\delta_n}{\beta} e^{(2\beta+\varepsilon\gamma K_4)(t-\sigma)} \leqslant \frac{\gamma\delta_n}{\beta} e^{\frac{5}{2}\beta(t-\sigma)}. \tag{9}$$

Рассмотрим разность $(L_{n+1} - L_n)$. Используя неравенства (4), (5), при $\varepsilon < \frac{\alpha}{3\beta}$ имеем

$$\delta_{n+1} \leqslant K_7\delta_n, \tag{10}$$

где $K_7 = \frac{\gamma}{\beta}\left\{\frac{6(\sup|F| + \sup|G|\, e^{\frac{5}{2}\beta\theta})}{\alpha} + \sup|R|\, e^{\frac{5}{2}\beta\theta}\cdot\left(1 + \frac{6K}{\alpha}\right)\right\}$. Пусть $\varphi_n = \sup|g_n - g_{n-1}|$, тогда

$$|\eta_n-\eta_{n-1}|=\left|\int_t^\sigma (Y_n-Y_{n-1})(h+Bg_n)d\tau+\int_t^\sigma Y_{n-1}B(g_n-g_{n-1})\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\gamma\delta_n}{\beta}(\sup|h|+\varepsilon\gamma K_4)\int_\sigma^t e^{\frac{5}{2}\beta(\tau-\sigma)}d\tau+\gamma\varphi_n\int_\sigma^t e^{\frac{3}{2}\beta(\tau-\sigma)}d\tau\leqslant K_8e^{\frac{5}{2}\beta(\tau-\sigma)}(\delta_n+\varphi_n).$$

Учитывая (4) — (5), имеем

$$|g_{n+1}-g_n|\leqslant K_1\int_{-\infty}^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-\sigma)}K_8\,[e^{\frac{5}{2}\beta(t-\sigma)}+e^{\frac{5}{2}\beta(t-\sigma+\theta)}](\delta_n+\varphi_n)\,d\sigma+$$

$$+\varepsilon\sup|R|\cdot K_8e^{\frac{5}{2}\beta\theta}(\delta_n+\varphi_n)+K\sup|R|\,e^{\frac{5}{2}\beta\theta}\int_{-\infty}^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-\sigma)}(\delta_n+\varphi_n)\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon K_9(\delta_n+\varphi_n),$$

$$\varphi_{n+1}\leqslant\varepsilon K_9(\delta_n+\varphi_n). \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) находим $\delta_{n+1}+\varphi_{n+1}\leqslant\varepsilon(K_7+K_9)(\delta_n+\varphi_n)$. Следовательно, если $\varepsilon<\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0=\min\left\{\frac{1}{K_7+K_9},\ \frac{\beta}{2\gamma K_4},\ \frac{\alpha}{3\beta}\right\}$, то последовательности $\{L_n\}$, $\{g_n\}$ сходятся и выполняются неравенства (7), (8) равномерно для $t\in(-\infty,\infty)$.

Обозначим

$$L(t,\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}L_n(t,\varepsilon),\quad g(t,\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}g_n(t,\varepsilon). \tag{12}$$

Так как сходимость последовательностей $\{L_n\}$, $\{g_n\}$ равномерна, то неравенства (7) и (8) имеют место и для функций $L(t,\varepsilon)$, $g(t,\varepsilon)$, поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to0}L(t,\varepsilon)=0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}g(t,\varepsilon)=0$.

Покажем, что соотношение (2) определяет интегральное многообразие системы (1), если L и g определяются формулами (12). Пусть $Y(t,t_0,\varepsilon)$ — фундаментальная матрица системы $\dot y=(A+BL)\,h$, тогда $Y(t,t_0,\varepsilon)=\lim\limits_{n\to\infty}Y_n(t,t_0,\varepsilon)$.

Аналогично, если $\eta(t,t_0,\varepsilon)=\int_{t_0}^t Y(t,s,\varepsilon)\,[B(s)\,g(s,\varepsilon)+h(s)]\,ds$ то $\eta(t,t_0,\varepsilon)=\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n(t,t_0,\varepsilon)$.

Пусть $y=y_t$ — решение уравнения $\dot y(t)=[A(t)+B(t)L(t,\varepsilon)]\,y(t)+B(t)g(t,\varepsilon)+h(t)$, удовлетворяющее условию $y_{t_0}=y_0$. Запишем его в виде $y_t=Y(t,t_0,\varepsilon)\,y_0+\eta(t,t_0,\varepsilon)$.

Обозначим $z_t=L(t,\varepsilon)\,y_t+g(t,\varepsilon)$. Тогда, учитывая (6) и (12), получим

$$z_t=\int_{-\infty}^t Z(t,\sigma)\left\{F(\sigma)\,y_\sigma+G(\sigma)\,y_{\sigma-\theta}+\varepsilon\frac{d}{d\sigma}[R(\sigma)\,y_{\sigma-\theta}]+H(\sigma)\right\}d\sigma.$$

Дифференцируя последнее тождество по t как по параметру, убеждаемся, что z_t удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \dot z_t=C(t)\,z_t+D(t)\,z_{t-\varepsilon\Delta}+\varepsilon P(t)\,\dot z_{t-\varepsilon\Delta}+\varepsilon\Big\{F(t)\,y_t+G(t)\,y_{t-\theta}+$$

$$+\varepsilon\frac{d}{dt}[R(t)\,y_{t-\theta}]+H(t)\Big\}.$$

Поэтому (y_t,z_t) — решение системы (1) и, следовательно, соотношение (2) определяет интегральное многообразие системы (1).

2. Исследуем некоторые свойства построенного интегрального многообразия. Имеют место следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1), 2) *и кроме того функции* $A, B, h, C, D, P, F, R, H$ *периодические (почти периодические) по* t *с периодом* T. *Тогда функции* $L(t, \varepsilon)\, g(t, \varepsilon)$, *в* (2) *также будут* T-*периодическими (почти периодическими) по* t.

Д о к а з а т е л ь с т в о несложно провести аналогично [1], [6]. Исследуем устойчивость интегрального многообразия (2) системы (1). Запишем первое уравнение системы (1) в виде

$$\dot{y}(t)=[A(t)+B(t)L(t,\varepsilon)]\,y(t)+B(t)\,g(t,\varepsilon)+h(t)+B(t)\,[z(t)-\\ -L(t,\varepsilon)\,y(t)-g(t,\varepsilon)].$$

Имеем

$$y(t)=Y(t,t_0,\varepsilon)\,y(t_0)+\int_{t_0}^{t}Y(t,s,\varepsilon)\,B(s)\,[z(s)-L(s,\varepsilon)\,y(s)-\\ -g(s,\varepsilon)]\,ds+\eta(t,t_0,\delta). \qquad (13)$$

Преобразовывая второе уравнение системы (1), получаем

$$z(t)=[Z(t,t_0)-Z(t,t_0-\varepsilon\Delta)]\,z(t_0)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon\Delta}^{t_0}Z(t,\sigma+\varepsilon\Delta)\,D(\sigma+\varepsilon\Delta)\,z(\sigma)d\sigma+\\ +\int_{t_0-\varepsilon\Delta}^{t_0}Z(t,\sigma+\varepsilon\Delta)\,P(\sigma+\varepsilon\Delta)\,\dot{z}(\sigma)\,d\sigma+\int_{t_0}^{t}Z(t,\sigma)\Big\{F(\sigma)\,(Y(\sigma,t_0,\varepsilon)\,y(t_0)+\\ +\int_{t_0}^{\sigma}Y(\sigma,s,\varepsilon)\,B(s)\,[z(s)-L(s,\varepsilon)\,y(s)-g(s,\varepsilon)]\,ds+\eta(\sigma,t_0,\varepsilon))+\\ +G(\sigma)\Big(Y(\sigma-\theta,t_0,\varepsilon)\,y(t_0)+\int_{t_0}^{\sigma-\theta}Y(\sigma-\theta,s,\varepsilon)\,B(s)\,[z(s)-L(s,\varepsilon)\,y(s)-\\ -g(s,\varepsilon)]\,ds+\eta(\sigma-\theta,t_0,\varepsilon)\Big)+\varepsilon\frac{d}{d\sigma}\Big(R(\sigma)\Big[Y(\sigma-\theta,t_0,\varepsilon)\,y(t_0)+\\ +\int_{t_0}^{\sigma-\theta}Y(\sigma-\theta,s,\varepsilon)\,B(s)\,[z(s)-L(s,\varepsilon)\,y(s)-g(s,\varepsilon)]\,ds+\\ +\eta(\sigma-\theta,t_0,\varepsilon)\Big]\Big)+H(\sigma)\Big\}\,d\sigma. \qquad (14)$$

Исходя из (12) и (13), находим

$$L(t,\varepsilon)\,y(t)+g(t,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{t}Z(t,\sigma)\Big\{F(\sigma)\,(Y(\sigma,t_0,\varepsilon)\,y(t_0)+\eta(\sigma,t_0,\varepsilon))+\\ +G(\sigma)\,(Y(\sigma-\theta,t_0,\varepsilon)\,y(t_0)+\eta(\sigma-\theta,t_0,\varepsilon))+\varepsilon\frac{d}{d\sigma}(R(\sigma)\,[Y(\sigma-\theta,t_0,\varepsilon)\times\\ \times y(t_0)+\eta(\sigma-\theta,t_0,\varepsilon)])\Big\}\,d\sigma+\int_{t_0}^{t}\Big[\int_{-\infty}^{t}Z(t,\sigma)\Big\{F(\sigma)\,Y(\sigma,s,\varepsilon)+\\ +G(\sigma)\,Y(\sigma-\theta,s,\varepsilon)+\varepsilon\frac{d}{d\sigma}(R(\sigma)\,Y(\sigma-\theta,s,\varepsilon))\Big\}\,d\sigma\,\Big|\,B(s)\,[z(s)-\\ -L(s,\varepsilon)\,y(s)-g(s,\varepsilon)]\,ds, \qquad (15)$$

Из соотношений (14), (15) и оценок для $Z(t, s)$ и $Y(\sigma, t)$, после несложных вычислений получим

$$|z(t) - L(t, \varepsilon) y(t) - g(t, \varepsilon)| \leqslant m_1 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-t_0)} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\theta} \cdot r_0 + \varepsilon m_2 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\theta} \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} [z(s) - L(s, \varepsilon) y(s) - g(s, \varepsilon)]\, ds,$$

где $r_0 = [\sup\limits_{s\in[t_0-\theta, t_0]} |z(s)| + \sup\limits_{s\in[t_0-\theta, t_0]} |\dot{z}(s)| + \sup\limits_{s\in[t_0-\theta, t_0]} |y(s)| + m_3\}$.

Обозначив $v(t) = e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t} |z(t) - L(t, \varepsilon) y(t) - g(t, \varepsilon)|$, из последнего неравенства имеем

$$v(t) \leqslant m_1 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}(\theta + t_0)} \cdot r_0 + \varepsilon m_2 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\theta} \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\, ds.$$

Решая это неравенство, получаем $v(t) \leqslant m_1 r_0 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}(\theta+t_0)} \cdot e^{\varepsilon m_2 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\theta} \cdot (t-t_0)}$, или

$$|z(t) - L(t, \varepsilon) y(t) - g(t, \varepsilon)| \leqslant m_1 r_0 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\theta} e^{-\left[\frac{\alpha}{\varepsilon} - \varepsilon m_2 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\theta}\right] \cdot (t-t_0)}.$$

Пусть $\theta = \varepsilon\theta_1$ $(\theta_1 \leqslant \Delta)$, тогда

$$|z(t) - L(t, \varepsilon) y(t) - g(t, \varepsilon)| \leqslant m_1 r_0 e^{\alpha\theta_1} \cdot e^{-\left[\frac{\alpha}{\varepsilon} - \varepsilon m_2 e^{\alpha\theta_1}\right](t-t_0)},$$

откуда непосредственно следует, что при $\varepsilon^2 < \dfrac{\alpha}{2m_2 e^{\alpha\theta_1}}$ $|z(t) - L(t, \varepsilon) y(t) - g(t, \varepsilon)| \to 0$ при $t \to \infty$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1), 2). *Тогда если* $\theta = \varepsilon\theta_1 (\theta_1 \leqslant \Delta)$, *то существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такая что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *любое решение* (y_t, z_t) *системы* (1), *удовлетворяющее начальным условиям* $y_{t_0} = y_0$, $z_t = \varphi(t)$ *при* $t \in [t_0 - \varepsilon\Delta, t_0]$, *будет притягиваться к многообразию* (2) *по закону* $|z_t - L(t, \varepsilon) y(t) - g(t, \varepsilon)| \leqslant K^* r_0 e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}(t-t_0)}$, *где* K^*, r_0 — *постоянные.*

3. Исследуем нелинейную сингулярно возмущенную систему вида

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, z, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = A(t) z(t) + B(t) z(t - \varepsilon\Delta) + \varepsilon C(t) \dot{z}(t - \varepsilon\Delta) + g[t, y(t), y(t - \varepsilon\Delta),$$

$$\dot{y}(t - \varepsilon\Delta), z(t), z(t - \varepsilon\Delta), \varepsilon]. \tag{16}$$

Пусть выполняются следующие условия. 3) Вектор-функции f и g определены в области

$$t \in (-\infty, \infty), y(t), y(t - \varepsilon\Delta), \dot{y}(t - \varepsilon\Delta) \in \Omega \subset R^n,$$

$$z(t), z(t - \varepsilon\Delta) \in U_\rho = \{z \in R^m, |z| < \rho\}, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \tag{17}$$

4) В области (17) f и g удовлетворяют условиям:

$$|f(t, y, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \ |g(t, y(t), y(t - \varepsilon\Delta), \dot{y}(t - \varepsilon\Delta), 0, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \tag{18}$$

где $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,

$$|f(t, y_1, z_1, \varepsilon) - f(t, y_2, z_2, \varepsilon)| \leqslant \lambda(\varepsilon, \rho) \{|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\}, \tag{19}$$

$$|g[t, y_1(t), y_1(t-\varepsilon\Delta), \dot{y}_1(t-\varepsilon\Delta), z_1(t), z_1(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon] - g[t, y_2(t),$$

$$y_2(t-\varepsilon\Delta), \dot{y}_2(t-\varepsilon\Delta), z_2(t), z_2(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon]| \leqslant \lambda(\varepsilon, \rho)\{|y_1(t) - y_2(t)| +$$

$$+ |y_1(t-\varepsilon\Delta) - y_2(t-\varepsilon\Delta)| + |\dot{y}_1(t-\varepsilon\Delta) - \dot{y}_2(t-\varepsilon\Delta)| +$$

$$+ |z_1(t) - z_2(t)| + |z_1(t-\varepsilon\Delta) - z_2(t-\varepsilon\Delta)|\},$$

где $\lambda(\varepsilon, \rho) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\rho \to 0$.

5) Матрицы A, B, C непрерывны и ограничены, $|A| < L$, $|B| < L$, $|C| < L$, и все корни характеристического уравнения $\operatorname{Det}(\lambda E - A - Be^{-\lambda\Delta} - \lambda Ce^{-\lambda\Delta}) = 0$ при всех t лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -2\alpha < 0$.

Теорема 4. *Пусть система* (16) *удовлетворяет условиям* 3) — 5). *Тогда найдутся такие* ρ_0, ε_0, *что для каждого* $0 < \rho < \rho_0$ *и* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *будет существовать вектор-функция* $h(t, y, \varepsilon)$ *со свойствами*:

$$|h(t, y, \varepsilon)| \leqslant D(\varepsilon), \quad |h(t, y_1, \varepsilon) - h(t, y_2, \varepsilon)| \leqslant \gamma(\varepsilon)|y_1 - y_2|,$$

где $D(\varepsilon) \to 0$, $\gamma(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *и такая, что соотношение*

$$z(t) = h(t, y, \varepsilon) \tag{20}$$

определяют интегральное многообразие системы (16).

Доказательство. Рассмотрим класс $C(D, \gamma)$ функций $H(t, y, \varepsilon)$, определенных при $t \in (-\infty, \infty)$, $y \in \Omega$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и удовлетворяющих условиям:

$$|H(t, y, \varepsilon)| \leqslant D, \quad |H(t, y_1, \varepsilon) - H(t, y_2, \varepsilon)| \leqslant \gamma|y_1 - y_2|, \tag{21}$$

Для некоторой функции $H(t, y, \varepsilon)$ из этого класса рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f[t, y(t), H(t, y, \varepsilon), \varepsilon], \quad y(t_0) = y_0,$$

единственное решение которого обозначим через $y_t = Y(t - t_0, t_0, y_0, H) = Y(s, t_0, y_0, H)$, где $s = t - t_0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$S_{t,x}(H) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} Z(t, s)\, g\{s, Y(s, t, y, H), Y(s-\varepsilon\Delta, t, y, H),$$

$$\dot{Y}(s-\varepsilon\Delta, t, y, H), H[s, Y(s, t, y, H), \varepsilon], H[s-\varepsilon\Delta, Y(s-\varepsilon\Delta, t, y, H), \varepsilon], \varepsilon\}\, ds \tag{22}$$

где $Z(t, s)$ — решение системы

$$\varepsilon\frac{dZ(t, s)}{dt} = A(t)Z(t, s) + B(t)Z(t-\varepsilon\Delta, s) + \varepsilon C(t)\dot{Z}(t-\varepsilon\Delta, s)$$

при начальных условиях $Z(t, s) = 0$ при $t < s$, $Z(s, s) = E$.

В силу условия 5) справедлива оценка $|Z(t, s)| \leqslant Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}$, $t \geqslant s$.

Исходя из свойств функций g, H, Y, Z, нетрудно показать, что оператор $S_{t,x}$ отображает $C(D(\varepsilon), \gamma(\varepsilon))$ в себя и существует единственное решение уравнения

$$H = S_{t,x}(H). \tag{23}$$

Обозначим это решение через $z = h(t, y, \varepsilon)$.

Из (22) и (23) получаем тождество

$$h(t, y, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} Z(t, s)\, g\{s, Y(s, t, y, h), Y(s-\varepsilon\Delta, t, y, h),$$

$$\dot{Y}(s-\varepsilon\Delta, t, y, h), h[s, Y(s, t, y, h), \varepsilon], h[s-\varepsilon\Delta, Y(s-\varepsilon\Delta, t, y, h), \varepsilon], \varepsilon\}\, ds.$$

Вводя обозначения

$$Y(t - t_0, t_0, y, h) = y_t, \quad h[t, Y(t - t_0, t_0, y, h), \varepsilon] = z_t, \tag{24}$$

получаем

$$z_t = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} Z(t, s)\, g(s, y_s, y_{s-\varepsilon\Delta}, \dot{y}_{s-\varepsilon\Delta}, z_s, z_{s-\varepsilon\Delta}, \varepsilon)\, ds.$$

Дифференцируя это тождество по t как по параметру и учитывая определение функции $Z(t, s)$, имеем

$$\varepsilon \frac{dz_t}{dt} = A(t) z_t + B(t) z_{t-\varepsilon\Delta} + \varepsilon C(t) \dot{z}_{t-\varepsilon\Delta} + g[t, y_t, y_{t-\varepsilon\Delta}, \dot{y}_{t-\varepsilon\Delta}, z_t, z_{t-\varepsilon\Delta}, \varepsilon].$$

Следовательно, функции (24) являются решением системы (16), а соотношение (20) определяет интегральное многообразие для системы (16).

Свойства периодичности, почти периодичности и устойчивости интегрального многообразия системы (16) характеризуются следующими теоремами.

Теорема 5. *Пусть относительно системы* (16) *выполняются условия 3)—5) и кроме того функции* $A, B, C, f(t, y, z, \varepsilon)$, $g(t, y, y_1, y_2, z, z_1, \varepsilon)$ *T-периодические (почти периодические) по t. Тогда интегральное многообразие, представимое соотношением* (20), *также будет T-периодическим (почти периодическим) по t равномерно относительно y.*

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* 3) — 5). *Тогда можно указать такие ε_0, ρ_0, что для всех $0 < \rho < \rho_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ интегральное многообразие системы* (16) *будет устойчивым в том смысле, что любое решение (y_t, z_t) системы* (16), *удовлетворяющее условиям $y_{t_0} = y_0$, $z_t = \varphi(t)$ при $t \in [t_0 - \varepsilon\Delta, t_0]$, с течением времени будет притягиваться к многообразию* (20) *по закону $|z_t - h(t, y_t, \varepsilon)| \leqslant K^*(\varepsilon, D)\, e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}(t-t_0)}$, где K^* — некоторая постоянная.*

1. Halanay A. An invariant surface for some linear singularly perturbed systems with time lag.— J. Diff. Egs., 1966, 2, 1, *33—46*.
2. Митропольский Ю. А., Фодчук В. И. Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, 6, *790—801*.
3. Фодчук В. И. О существовании и свойствах интегрального многообразия для системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и переменными коэффициентами.— В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев, 1963, *129—140*.
4. Фодчук В. И., Холматов А. Периодические и почти - периодические решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений нейтрального типа.— Дифференц. уравнения, 1976, **12**, 6, *1019—1027*.
5. Колесов Ю. С. Об устойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа.— Сиб. мат. журн., 1979, **20**, 2, *317—321*.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. *410*.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
19.02.1981 г.