КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.948.32

И. О. Антонишин

Об асимптотике решений интегральных уравнений с разностным ядром

В работе [1] рассмотрены уравнения вида

$$u(\xi) - \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi - t)\, dF(t) = g(\xi), \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где $F(t)$ — вероятностная функция распределения нерешетчатого типа, и доказана теорема о быстроте сходимости остаточного члена в асимптотическом разложении

$$u(\xi) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt}{m}\, \sigma(\xi) + w(\xi), \text{ где } \sigma(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0 \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

В [2] показано, что встречаются уравнения типа (1), в которых функция $F(t)$ не монотонна. В связи с этим возникает задача обобщения результата Карлина на случай, когда $F(t)$ — функция ограниченной вариации.

В данной работе для уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \xi)\, dA(\xi) = f(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{2}$$

где $A(\xi)$ — функция ограниченной вариации, получены оценки для остаточного члена $\eta(t)$ в асимптотических разложениях [3]

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{i\lambda_k t} + \eta(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

где $\eta(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$, а γ_k — постоянные.

Следуя [3], введем ряд обозначений и определений: $H_1(A)$ — класс функций ограниченной вариации на всей прямой, непрерывных слева; $L^\infty(-\infty, \infty)$ — класс функций $f(t)$, измеримых по Лебегу на всей прямой, для которых $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (-\infty, \infty)} |f(t)| < \infty$; $H_1(f)$ — класс функций $f(t) \in L^\infty(-\infty, \infty)$, исчезающих на $(-\infty)$, для которых $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = f(\infty)$; $H_3(A, n)$ — класс функций $A(t) \in H_1(A)$, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^n |dA(t)| < \infty$; $H_3(f, n)$ — класс функций $f(t) \in H_1(f)$, для которых $\int_0^{\infty} t^{n-1} |f(t) - f(\infty)|\, dt < \infty$; $B(I)$ — класс функций, измеримых по Борелю на интервале I; $LAC(I)$ — класс абсолютно непрерывных функций на каждом компактном подынтервале интервала I; $\hat{A}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $A(t) \in H_1(A)$, $(-\infty < \lambda < \infty)$. Множество точек λ, для которых $\hat{A}(\lambda) = -1$, $\hat{A}(\lambda) = 0$, обозначим соответственно через $S_b(A)$, $S_c(A)$.

Определение 1. **Решение** интегрального уравнения $x(t) \in L^\infty(-\infty, \infty)$ назовем **существенно ограниченным**.

Определение 2. Если решение $x(t)$ интегрального уравнения удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ \tau\to 0}} |x(t+\tau) - x(t)| = 0, \tag{3}$$

то оно удовлетворяет условию Таубера, и справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (2) $A(t) \in H_3(A, n)$, $f(t) \in H_3(f, n)$, $S_c(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_k \neq 0$, $m_k = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_k t} t dA(t) \neq 0$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$. *Кроме того* $A(t)$, $f(t)$ *удовлетворяют дополнительно еще следующим условиям:*

1) *преобразование Фурье функции* $A(\xi)$ *имеет разложение*

$$\hat{A}(\lambda) = i^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n) \hat{Q}(\lambda), \tag{4}$$

где $\hat{Q}(\lambda) \neq 0$ *при всех вещественных* λ. *Полагая*

$$i(\lambda - \lambda_k)\hat{Q}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_k \xi} dR_k(\xi), \tag{5}$$

потребуем, чтобы $R_k(\xi)$ *были функциями ограниченной вариации вида* $R_k(\xi) = \sigma(\xi) + S_k(\xi)$, *где* $S_k(\xi) \in LAC(-\infty, \infty)$, $S_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} s_k(t)\, dt$, *причем* $s_k(t) \in L^1(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{N+2} s_k(t)\, dt < \infty$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

2) *функция* $f(t)$ *ограниченная, монотонно убывающая при* $t \geqslant t_0 > 0$ *и монотонно неубывающая при* $t \leqslant -t_0 < 0$, *причем*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{N+1} f(t)\, dt < \infty. \tag{6}$$

Тогда решение $x(t)$, *принадлежащее классу* $B(-\infty, \infty) \cap L^\infty(-\infty, \infty)$ *и удовлетворяющее условию* (3), *можно представить в виде*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{i\lambda_k t} + \eta(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{7}$$

где γ_k — *постоянные величины и* $\lim\limits_{t\to\infty} t^N \eta(t) = 0$.

Прежде чем доказать теорему, установим следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть в уравнении*

$$x(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t-\xi)\, dA(\xi) = f(t), \quad -\infty < t < \infty \tag{8}$$

$$A(t) \in LAC(-\infty, \infty), \ A(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} a(\xi)\, d\xi, \ a(\xi) \in L^1(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{N+2} a(t)\, dt < \infty, \quad S_b(A) = \{\lambda_0 \neq 0\}, \ m_0 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_0 t} t dA(t) \neq 0.$$

Функция $f(t)$ — *ограниченная, монотонно убывающая при* $t \geqslant t_0 > 0$ *и неубывающая при* $t \leqslant -t_0 < 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{N+1} f(t)\, dt < \infty$. *Тогда, если решение* $x(t) \in B(-\infty, \infty) \cap L^\infty(-\infty, \infty)$, *то оно представимо в виде*

$$x(t) = \gamma_0 e^{i\lambda_0 t} + \eta(t), \tag{9}$$

где $\gamma_0 = \frac{1}{m_0}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(-\xi)\, e^{i\lambda_0\xi} Z(\xi)\, d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-i\lambda_0\xi} f(\xi)\, d\xi \right\}$, $Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-i\lambda_0\xi} d[\sigma(\xi) + A(\xi)]$, *причем* $\lim\limits_{t\to\infty} t^N \eta(t) = 0$.

Доказательство. Введя в уравнении (8) замену $x(t) = x_1(t)\, e^{i\lambda_0 t}$ и обозначив $b(\xi) = a(\xi)\, e^{-i\lambda_0\xi}$, получим

$$x_1(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\xi)\, b(\xi)\, d\xi = f(t)\, e^{-i\lambda_0 t}. \tag{10}$$

Так как $\hat{b}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} b(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} e^{i\lambda_0 t} a(t)\, dt = \hat{a}(\lambda + \lambda_0)$ и $\hat{a}(\lambda + \lambda_0) = -1$ только при $\lambda = 0$, то множество $S_b(A)$ будет состоять из единственной токи $\lambda = 0$.

Согласно теореме 8 [1] уравнение (10) имеет решение, принадлежащее классу $B(-\infty, \infty) \cap L^\infty(-\infty, \infty)$, $x_1(t) = w(t) + \frac{\hat{f}(\lambda_0)}{m_0}\sigma(t)$, причем $w(t) \in B(-\infty, \infty) \cap L^\infty(-\infty, \infty)$ и $\lim\limits_{|t|\to\infty} t^N w(t) = 0$. Возвращаясь к функции $x(t)$, получим

$$x(t) = w(t)\, e^{i\lambda_0 t} + \frac{\hat{f}(\lambda_0)}{m_0} e^{i\lambda_0 t}\sigma(t). \tag{11}$$

Если допустить, что решение $x(t)$ из формулы (11) совпадает с решением $x(t)$ из формулы (9) на $(-\infty)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(-\xi)\, e^{i\lambda_0\xi} Z(\xi)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda_0\xi} f(\xi)\, d\xi \text{ и } \gamma_0 = \frac{1}{m_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_0\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{\hat{f}(\lambda_0)}{m_0}.$$

Тогда оба решения при $t \to +\infty$ станут тождественными. Отсюда $\eta(t) = w(t)\, e^{i\lambda_0 t}$, $t > 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} t^N \eta(t) = 0$.

Доказательство теоремы. Подставляя решение (7) в уравнение (2), убеждаемся, что функция $\eta(t)$ — решение уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(t-\xi)\, dA(\xi) = f(t), \tag{12}$$

причем $\eta(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Функция $\eta(t)$ будет также решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(t-\xi)\, e^{i\lambda_n\xi} B_n(\xi)\, d\xi = -\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\lambda_k t}}{P'(i\lambda_k)} \int\limits_{t}^{\infty} e^{-i\lambda_k\tau} f(\tau)\, d\tau,$$

где $B_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} \hat{B}_n(\lambda)\, d\lambda$, $\hat{B}_n(\lambda) = \hat{Q}(\lambda + \lambda_n)$, а $P(i\lambda) = (i\lambda - i\lambda_1) \times (i\lambda - i\lambda_2) \dots (i\lambda - i\lambda_n)$.

Учитывая, что $\hat{A}(\lambda)$ имеет разложение (4) и что $\hat{A}(\lambda_1) = 0$, введем замену $\eta_1(t) = \eta(t)\, e^{-i\lambda_1 t}$.

Тогда уравнение (12) запишем в виде $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta_1(t-\xi)\, e^{-i\lambda_1\xi} dA(\xi) = \tilde{f}(t)$, где $\tilde{f}(t) = f(t)\, e^{-i\lambda_1 t}$.

Положив $B_1(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-i\lambda_1\xi}dA(\xi)$ и введя функции $\eta_1^n(t)=n\int\limits_{t}^{t+\frac{1}{n}}\eta_1(\xi)\,d\xi$, $\tilde{f}^n(t)=n\int\limits_{t}^{t+\frac{1}{n}}\tilde{f}(\xi)\,d\xi$, легко видеть, что $\eta_1^n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_1^n(t-\xi)\,dB_1(\xi)=\tilde{f}^n(t). \tag{13}$$

Так как производные функций $\eta_1^n(\xi)$ существенно равномерно ограничены, то, интегрируя по частям уравнение (13), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_1^{n\prime}(t-\xi)\,B_1(\xi)\,d\xi=\tilde{f}^n(t). \tag{14}$$

Интегрируя обе стороны уравнения (14) от t до a и устремляя $n\to\infty$, согласно теореме Лебега [4] имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\eta_1(t-\xi)-\eta_1(a-\xi)]\,B_1(\xi)\,d\xi=-\int\limits_{t}^{a}\tilde{f}(\tau)\,d\tau.$$

Это равенство выполняется всюду в силу непрерывности правой части. Устремляя $a\to\infty$, на основании леммы Абеля [1] получаем,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_1(t-\xi)\,B_1(\xi)\,d\xi=-\int\limits_{t}^{\infty}\tilde{f}(\tau)\,d\tau.$$

Если $r(t)$ — интегрируемая функция, а $v(t)\underset{|t|\to\infty}{\longrightarrow}0$, то $\lim\limits_{|t|\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(\xi-t)\times$ $\times\, r(t)\,dt=0$.

Возвращаясь к старым переменным, запишем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(t-\xi)\,e^{i\lambda_1\xi}B_1(\xi)\,d\xi=-e^{i\lambda_1 t}\int\limits_{t}^{\infty}\tilde{f}(\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

После введения $e^{i\lambda_1\xi}B_1(\xi)\,d\xi=dA_1(\xi)$ становится ясно, что $\hat{A}_1(\lambda)=$ $=\hat{B}_1(\lambda-\lambda_1)$ и тогда уравнение (15) можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(t-\xi)\,dA_1(\xi)=-e^{i\lambda_1\xi}\int\limits_{t}^{\infty}\tilde{f}(\tau)\,d\tau\equiv f_1(t).$$

Далее, учитывая, что $\hat{A}(\lambda_2)=0$, аналогичным образом с помощью замены $\eta(t)=\eta_2(t)\,e^{i\lambda_2 t}$ получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(t-\xi)\,e^{i\lambda_2\xi}B_2(\xi)\,d\xi=-e^{i\lambda_2 t}\int\limits_{t}^{\infty}f_1(\tau)\,d\tau,$$

где $B_2(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-i\lambda_2\xi}dA_1(\xi)$.

Проделав n таких шагов, придем к уравнению вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(t-\xi)\,e^{i\lambda_n\xi}B_n(\xi)\,d\xi=-e^{i\lambda_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}_{n-1}(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

где $B_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-i\lambda_n\xi}dA_{n-1}(\xi)$.

Легко проверить выполнение соотношений $\hat{A}(\lambda+\lambda_1)=i\lambda\hat{B}_1(\lambda)$, $\hat{A}_1(\lambda+\lambda_2)=i\lambda B_2(\lambda),\ldots,\hat{A}_{n-1}(\lambda+\lambda_n)=i\lambda\hat{B}_n(\lambda)$. Функция $\hat{Q}(\lambda)$ в разложении (4) примет вид $\hat{Q}(\lambda)=\hat{B}_n(\lambda-\lambda_n)=\hat{A}_n(\lambda)$.

Уравнение (16) можно записать эквивалентным образом

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t-\xi)e^{i\lambda_n\xi}B_n(\xi)\,d\xi=-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{i\lambda_k t}}{P'(i\lambda_k)}\int_t^{\infty}e^{-i\lambda_k\tau}f(\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Для случая $n=1$ утверждение очевидно. Для $n=2$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t-\xi)e^{i\lambda_2\xi}B_2(\xi)\,d\xi=e^{i\lambda_2 t}\int_t^{\infty}e^{-i(\lambda_2-\lambda_1)\tau}d\tau\int_\tau^{a}f(t_1)e^{i\lambda_1 t_1}dt_1=$$

$$=\frac{e^{i\lambda_1 t}}{i(\lambda_2-\lambda_1)}\int_t^{\infty}e^{-i\lambda_1\tau}f(\tau)\,d\tau+\frac{e^{i\lambda_2 t}}{i(\lambda_1-\lambda_2)}\int_t^{\infty}e^{-i\lambda_2\tau}f(\tau)\,d\tau.$$

Методом математической индукции легко показать законность уравнения (17). Заметим, что правая часть уравнения (17) подобрана так, чтобы она стремилась к нулю при $t\to\infty$.

В силу принципа суперпозиции функцию $\eta(t)$ можно представить в виде суммы

$$\eta(t)=\zeta_1(t)+\zeta_2(t)+\ldots+\zeta_n(t), \tag{18}$$

причем каждое $\zeta_k(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_k(t-\xi)e^{i\lambda_n\xi}B_n(\xi)\,d\xi=-\frac{e^{i\lambda_k t}}{P'(i\lambda_k)}\int_t^{\infty}e^{-i\lambda_k\tau}f(\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

В результате прямого подсчета убеждаемся, что уравнение (19) можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_k(t-\xi)Q(\xi)\,d\xi=-\frac{e^{i\lambda_k\tau}}{P'(i\lambda_k)}\int_t^{\infty}e^{-i\lambda_k\tau}f(\tau)\,d\tau. \tag{20}$$

Доказать, что $\zeta_k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_k(t-\xi)\,dR_k(\xi)=\frac{f(t)}{P'(i\lambda_k)}, \tag{21}$$

где

$$\hat{R}_k(\lambda)=i(\lambda-\lambda_k)\hat{Q}(\lambda), \tag{22}$$

можно аналогично тому, как это сделано при переходе от уравнения (12) к уравнению (20).

Для этого введем функцию

$$Q_k(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-i\lambda_k\xi}dR_k(\xi) \tag{23}$$

и замену $\zeta_k(t)=\zeta_k^1(t)e^{i\lambda_k t}$.

Уравнение (21) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_k^1(t-\xi)\,dQ_k(\xi)=\frac{f(t)}{P'(i\lambda_k)}e^{-i\lambda_k t}\equiv\frac{\tilde{f}(t)}{P'(i\lambda_k)}.$$

Вводя функции $\zeta_k^{1n}(t) = n \int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} \zeta_k^1(\xi)\, d\xi$, $\tilde{f}^n(t) = n \int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} \tilde{f}(\xi)\, d\xi$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_k^{1n}(t-\xi)\, dQ_k(\xi) = \frac{\tilde{f}^n(t)}{P'(i\lambda_k)}. \tag{24}$$

Интегрируя уравнение (24) по частям в пределах от t до a и устремляя $n \to \infty$, а затем $a \to \infty$, по теореме Лебега [4] получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_k(t-\xi)\, Q_k(\xi)\, d\xi = -e^{i\lambda_k t} \int\limits_t^{\infty} \frac{\tilde{f}(\tau)}{P'(i\lambda_k)}.$$

Возвращаясь к старым переменным и учитывая формулы (22), (23), запишем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_k(t-\xi)\, Q(\xi)\, d\xi = -e^{-i\lambda_k t} \int\limits_t^{\infty} \frac{\tilde{f}(\tau)}{P'(i\lambda_k)}.$$

Таким образом, уравнения (20) и (21) эквивалентны.
По условию теоремы, функция $R_k(\xi) = \delta(\xi) + S_k(\xi)$, следовательно, уравнение (21) можно записать в виде

$$\zeta_k(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_k(t-\xi)\, s_k(\xi)\, d\xi = \frac{f(t)}{P'(i\lambda_k)}. \tag{25}$$

Учитывая, что $\zeta_k(t)$ — решение уравнения (25), стремящееся к 0 на ∞, а само уравнение (25) удовлетворяет условиям леммы 1, получаем $\lim\limits_{t\to\infty} t^N \zeta_k(t) = 0$. В силу формулы (18) $\lim\limits_{t\to\infty} t^N \eta(t) = 0$, что и требовалось доказать.

1. Karlin S. On the Renewal Equations.— Pacific J. Math., 1955, 5, 2, *229—257*.
2. Levin J. J., Nohel J. A. On a System of Integro — differential Equations Occurring in Reactor Dynamics.— J. Math. Mech., 1960, 9, 3, *347—368*.
3. Levin J. J., Shea P. F. On the asymptotic behavior of the bounded solutions of some integral equations.— J. Math. Analysis Applic., 1972, 37, 1, *42—82*.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. Ф. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. *496*.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
10. 10.1980 г.