УДК 517.925.3

С. И. Гургула

Исследование устойчивости решений импульсных систем вторым методом Ляпунова

В данной работе исследуется вопрос устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, подвергающихся в фиксированные моменты времени импульсному воздействию

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} \equiv x(t_i + 0) - x(t_i) = I_i(x), \ t \geqslant t_0, \ x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n). \tag{1}$$

Следует отметить, что исследование устойчивости некоторого решения системы (1), как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть сведено к исследованию устойчивости тривиального решения некоторой другой системы того же вида. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что функция $f(t, x)$ определена в области

$$Z = \{t \geqslant t_0, \ x \in \bar{J}_h\}, \tag{2}$$

где $\bar{J}_h = \{x \in R^n, \ \|x\| \leqslant h\}$, функции $I_i(x)$ определены в $\bar{J}_h$, и $f(t, 0) \equiv 0$, $t \geqslant t_0$, $I_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, и без ограничения общности исследуем на устойчивость тривиальное решение системы (1). Относительно последовательности моментов времени $\{t_i\}$ предполагается, что $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Результаты дополняют исследования работ [1—5] и [8—10].

Функция Ляпунова, о которой будет идти речь в теоремах 1—4, предполагается скалярной и непрерывно дифференцируемой.

1. Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *существует положительно определенная функция Ляпунова* $V(t, x)$, *такая, что всюду в* (2) *выполнены неравенства*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot f_j \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leqslant -\varphi(V), \tag{3}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \leqslant \psi(V(t_i, x)), \ i = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

где $\varphi(s)$, $\psi(s)$ — *непрерывные функции*, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(s) > 0$, $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$, $\varphi(s)$ — *возрастающая функция, а последовательность* $\{t_i\}$ *удовлетворяет условию*

$$t_i - t_{i-1} \geqslant \theta, \qquad i = 1, 2, \dots . \tag{5}$$

Тогда, если при некоторых $\gamma \geqslant 0$ *и* $a_0 > 0$ *для всех* $a \in]0, a_0]$

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leqslant \theta - \gamma, \tag{6}$$

то решение $x \equiv 0$ *системы устойчиво, причем оно асимптотически устойчиво, если* $\gamma > 0$.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < h$ и $l = \inf\limits_{t \geqslant t_0, \|x\| \geqslant \varepsilon} V(t, x) \leqslant a_0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\sup\limits_{\|x\| < \delta} V(t_0, x) < l$, и пусть $x(t)$, $x(t_0) = x_0 \in J_\delta$, — произвольное решение системы, начинающееся в J_δ. Для функции $v(t) = V(t, x(t))$ согласно (3) имеем $v'(t) \leqslant -\varphi(v(t))$, откуда несложно получить

$$\int_{v(t_i)}^{v(t_{i-1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geqslant \theta, \qquad i = 1, 2, \dots . \tag{7}$$

Из (7) и (6) при $a = v(t_i)$ с учетом (4) следует

$$\int\limits_{v(t_i+0)}^{v(t_{i-1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geqslant \gamma, \tag{8}$$

что означает, что последовательность $\{v(t_i+0)\}$ не возрастает, а, поскольку в силу (3) $v(t)$ убывает на каждом из промежутков $]t_i, t_{i+1}]$, этого достаточно, чтобы для всех $t \geqslant t_0$ выполнялось неравенство $v(t) \leqslant v(t_0)$. Если $\gamma > 0$, то, предположив, что $v(t_i+0) \to \alpha > 0$ при $i \to \infty$, из (8) получаем $v(t_{i-1}+0) - v(t_i+0) \geqslant \gamma\varphi(\alpha) = \mathrm{const}$. Противоречие, следовательно $\alpha = 0$, а отсюда следует, что $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть для системы* (1) *существует положительно определенная функция Ляпунова $V(t, x)$ такая, что всюду в* (2) *выполнены неравенства*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V, f\rangle \leqslant \varphi(V), \tag{9}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \leqslant \psi(V(t_i, x)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $\varphi(s)$, $\psi(s)$ — такие же, как и в теореме 1, а последовательность $\{t_i\}$ удовлетворяет условию

$$t_i - t_{i-1} \leqslant \theta, \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Тогда, если при некоторых $\gamma \geqslant 0$ и $a_0 > 0$ для всех $a \in]0, a_0]$

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geqslant \theta + \gamma, \tag{12}$$

решение $x \equiv 0$ системы устойчиво, причем оно асимптотически устойчиво, если $\gamma > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2 отличается от доказательства теоремы 1 только тем, что основную роль здесь играет легко получаемое из (9) неравенство

$$\int\limits_{v(t_i+0)}^{v(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leqslant t - t_i, \quad t_i < t \leqslant t_{i+1},$$

из которого, а также из (12), (10) и (11) следует $v(t) \leqslant v(t_i)$, $t \geqslant t_i$. Вместо последовательности $\{v(t_i+0)\}$ нужно рассмотреть последовательность $\{v(t_i)\}$. Что же касается выбора δ по ε, то его нужно выбрать так, чтобы

$$\int\limits_{m}^{l} \frac{ds}{\varphi(s)} > \theta,$$

где $m = \max\limits_{\|x\| \leqslant \delta} V(t_0, x)$, что в силу (12) всегда возможно.

2. Формулировки следующих теорем предполагают, что для системы (1) существует функция Ляпунова $V(t, x)$, область положительности которой $\Pi = \{(t, x) \in Z,\ V(t, x) > 0\}$ при всяком $t \geqslant t_0$ имеет ненулевое открытое сечение, примыкающее к началу координат. Причем в Π $V(t, x)$ ограничена и $a_0 = \sup\limits_{(t,x)\in\Pi} V(t, x)$.

Справедливы утверждения ($\varphi(s)$, $\psi(s)$ такие же, как и выше).

Т е о р е м а 3. *Пусть в Π выполнены неравенства*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V, f\rangle \geqslant -\varphi(V), \tag{13}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \geqslant \psi(V(t_i, x)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

и имеет место (11). *Тогда, если при некотором* $\gamma > 0$ *для всех* $a \in]0, a_0]$

$$\int\limits_{a}^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geqslant \theta + \gamma, \tag{15}$$

решение $x \equiv 0$ *системы неустойчиво.*

Теорема 4. *Пусть в* Π *выполнены неравенства*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \geqslant \varphi(V), \tag{16}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \geqslant \psi(V(t_i, x)), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{17}$$

и имеет место (5). *Тогда, если при некотором* $\gamma > 0$ *для всех* $a \in]0, a_0]$

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \leqslant \theta - \gamma, \tag{18}$$

решение $x \equiv 0$ системы неустойчиво.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\delta > 0$ как угодно мало. По условию найдется $x_0 \in J_\delta$ такое, что $V(t_0, x_0) > 0$. Покажем, что решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, с течением времени выйдет за пределы $\bar{J}_h$. Допустив противное, покажем, что $(t, x(t)) \in \Pi$, $t \geqslant t_0$. В самом деле, если $v(t^*) = 0$ для $t_k < t^* \leqslant t_{k+1}$, где $v(t) = V(t, x(t))$, причем $v(t_k + 0) > 0$, то, зафиксировав $a' > 0$ такое, что $\psi(a') \leqslant v(t_k + 0)$, из (13), (11) и (15) получаем противоречивую цепочку неравенств

$$\theta + \gamma \leqslant \int\limits_{a'}^{\psi(a')} \frac{ds}{\varphi(s)} \leqslant \int\limits_{0}^{v(t_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \equiv \int\limits_{v(t^*)}^{v(t_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leqslant t^* - t_k \leqslant \theta.$$

Действуя аналогично, как при доказательстве теоремы 1, нетрудно получить неравенство $v(t_i + 0) - v(t_{i-1} + 0) \geqslant \gamma\varphi(v(t_0))$, противоречащее тому, что $(t, x(t)) \in \Pi$, ибо в этом случае, в силу ограниченности и монотонности, последовательность $\{v(t_i + 0)\}$ должна сходиться к конечному пределу. Теорема доказана.

Теорема 4 доказывается аналогично.

3. Рассмотрим линейную систему с импульсным воздействием вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \ t \neq t_i, \ \Delta x|_{t=t_i} = Bx, \tag{19}$$

в которой A и B — постоянные матрицы, причем матрица A взята в действительной канонической форме (см. [6, 7]). В противном случае этого всегда можно добиться с помощью невырожденного линейного преобразования.

Функцию Ляпунова для этой системы возьмем в виде $V(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Тогда $\langle \operatorname{grad} V, Ax \rangle = 2\langle x, Ax \rangle$, $V(x + Bx) = \langle (E + B)x, (E + B)x \rangle$ и имеют место соотношения

$$2(\lambda - \varepsilon) V(x) \leqslant \langle \operatorname{grad} V, Ax \rangle \leqslant 2(\Lambda + \varepsilon) V(x), \ \alpha^2 V(x) \leqslant V(x + Bx) \leqslant \beta^2 V(x), \tag{20}$$

где $\lambda = \min\limits_{j} \operatorname{Re} \lambda_j(A)$, $\Lambda = \max\limits_{j} \operatorname{Re} \lambda_j(A)$, $\alpha^2 = \min\limits_{j} \lambda_j [(E + B)^T (E + B)]$, $\beta^2 = \max\limits_{j} \lambda_j [(E + B)^T (E + B)]$, ε можно считать сколь угодно малым положительным числом и $\alpha > 0$.

Принимая во внимание (20), из теорем 1—4 получаем условия асимптотической устойчивости и неустойчивости тривиального решения системы (19), которые с учетом произвольной малости ε и γ можно сформулировать так:

Решение $x \equiv 0$ *асимптотически устойчиво, если*

$$\Lambda + \frac{1}{\theta} \ln \beta < 0, \tag{21}$$

где $\theta \leqslant t_i - t_{i-1}$ *при* $\Lambda < 0$ *и* $\theta \geqslant t_i - t_{i-1}$ *при* $\Lambda > 0$, *и неустойчиво, если*

$$\lambda + \frac{1}{\theta} \ln \alpha > 0, \tag{22}$$

где $\theta \geqslant t_i - t_{i-1}$ *при* $\lambda < 0$ *и* $\theta \leqslant t_i - t_{i-1}$ *при* $\lambda > 0$.

Аналогично могут быть получены условия асимптотической устойчивости и неустойчивости для системы вида $dx/dt = Ax + f(t, x)$, $t \neq t_i$, $\Delta x|_{t=t_i} = Bx + I_i(x)$, в которой $\| f(t, x) \| \leqslant k \| x \|$, $\| I_i(x) \| \leqslant l \| x \|$, $t \geqslant t_0$, $i = 1, 2, \ldots$.

1. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. *224*.
2. Мильман В. Д., Мышкис А. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков.— Сиб. мат. журн., 1960, **1**, 2, *233—237*.
3. Мышкис А. Д., Самойленко А. М. Системы с толчками в заданные моменты времени.— Мат. сб., 1967, **74**, 2, *202—208*.
4. Самойленко А. М. Перестюк Н. А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1977, **13**, 11, *1981—1992*.
5. Перестюк М. О. Стійкість розв'язків лінійних систем з імпульсним збуренням.— Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика і механіка, 1977, 19, *71—76*.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1969. *246*.
7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. *472*.
8. Мельников Г. И. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова.— Докл. АН СССР, 1956, **110**, 3, *326—329*.
9. Матросов В. М. Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова.— Дифференц. уравнения, 1968, **4**, 8, *1374—1386*; 1969, 5, 12, *2129—2143*.
10. Кордуняну К. Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости.— Analele Stiintifice ale univ. «Al. I. Cusa» din lasi., Sec.1, 1960, **6**, 1, *47—58*.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию — 30.05.1980 г.
после переработки — 6.01.1981 г.