УДК 517.929.4

В. Г. Курбатов

О разрешимости относительно производной устойчивого функционально-дифференциального уравнения

Исследование устойчивости функционально-дифференциального уравнения [1—2] нейтрального типа обычно проводится в предположениях, означающих, что его можно разрешить относительно производной и тем самым свести к уравнению запаздывающего типа. В настоящей работе показано, что это ограничение близко к необходимому: в случае, когда «нейтральная часть» не зависит от времени, устойчивым может быть только уравнение, разрешимое относительно производной.

Пусть E — банахово пространство с нормой $|\cdot|$. Обозначим через $L[a, b] = L_\infty[a, b]$ пространство классов эквивалентных измеримых ограниченных по мере [3, с. 225] функций $x : [a, b] \to E$ с нормой $\| x \| = \operatorname{vrai}\sup | x(t) |$, а через $W[a, b]$ — пространство функций $x \in L[a, b]$, представимых в виде интеграла

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds$$

от некоторой функции $\dot{x} \in L[a, b]$ (называемой ее производной), с нормой $\|x\| = \|\dot{x}\|_L + \|x\|_L$. Пространства $L(-\infty, \infty)$ и $W(-\infty, \infty)$ условимся обозначать сокращенно через L и W соответственно.

В данной статье исследуется уравнение

$$(D\dot{x})(t) + (Bx)(t) = f(t) \quad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

где

$$(Dx)(t) = x(t) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x(t - h_m), \tag{2}$$

$h_m > 0$, $a_m : E \to E$ — линейные ограниченные операторы ($m = 1, 2, \ldots$), $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|a_m\| < \infty$; а $B : L \to L[0, \infty)$ — линейный ограниченный оператор, удовлетворяющий условию

$$\forall (t, x)\,[x(s) = 0\ (s \leqslant t)] \Rightarrow [(Bx)(s) = 0\ (s \leqslant t)]. \tag{3}$$

Операторы, удовлетворяющие (3), будем называть *запаздывающими*.

Очевидно, D можно рассматривать как линейный ограниченный запаздывающий оператор, действующий из L в L или в $L\,[0, \infty)$.

Тот факт, что операторы D и B являются запаздывающими, позволяет определить Dx и Bx для функции x, заданной только на промежутке вида $(-\infty, t]$. Корректно это можно сделать, например, следующим образом. Пусть $x \in L(-\infty, t]$. Под Bx условимся в этом случае понимать функцию, определенную для $s \in [0, t]$ как $(B\hat{x})(s)$, где $\hat{x}$ — произвольное продолжение функции x, до элемента пространства L. Dx можно определить непосредственно по формуле (2).

Пусть заданы функции $f \in L[0, \infty]$ и $x \in W(-\infty, 0]$. *Начальной задачей* для уравнения (1) будем называть задачу

$$(D\dot{y})(s) + (By)(s) = f(s) \quad (s \geqslant 0), \;\; y(s) = x(s) \quad (s \leqslant 0) \tag{4}$$

об отыскании функции $y : \mathbf{R} \to E$, сужение которой на любой промежуток $(-\infty, t]\,(t < \infty)$ лежит в $W\,(-\infty, t]$ и удовлетворяет (4) почти везде.

П р е д л о ж е н и е. *Для любых $f \in L[0, \infty)$ и $x \in W(-\infty, 0]$ решение задачи (4) существует и единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о нетрудно провести, используя обычные [1] рассуждения.

О п р е д е л е н и е. Назовем уравнение (1) *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*, если для любых $f \in L[0, \infty)$ и $x \in W(-\infty, 0]$ решение y задачи (4) лежит в $W(-\infty, \infty)$.

З а м е ч а н и е. Ограничимся рассмотрением только устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Это ограничение не принципиально. Можно показать (см., например, [4]), что она при некоторых незначительных дополнительных условиях равносильна асимптотической и экспоненциальной устойчивости.

В дальнейшем устойчивость при постоянно действующих возмущениях будем называть просто *устойчивостью*.

Л е м м а. *Для того чтобы уравнение (1) было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы для любой $g \in L[0, \infty)$ решение z задачи*

$$(D\dot{z})(s) + (Bz)(s) = g(s) \;\; (s \geqslant 0), \quad z(s) = 0 \;\; (s \leqslant 0) \tag{5}$$

лежало в W.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что если положить $g(s) = f(s) - (D\hat{x})(s) - (B\hat{x})(s)$, где $\hat{x}$ — произвольное продолжение функции x до элемента пространства W, то решения задач (4) и (5) будут связаны соотношением $y = z - \hat{x}$.

Обозначим через W_0 пространство функций $x \in W$, равных нулю левее нуля. Определим оператор $A : W_0 \to L[0, \infty)$ по формуле $(Ax)(t) = (D\dot{x})(t) + (Bx)(t)$.

Следствие 1. *Для того чтобы уравнение (1) было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был обратим.*

Следствие 2. *Если уравнение (1) устойчиво, то существует такая константа K, независящая от f и x, что*

$$\|y\| \leqslant K(\|f\| + \|x\|).$$

Доказательство следует из леммы и теоремы об открытом отображении [5].

Обозначим через L_0 подпространство функций $x \in L$, равных нулю левее нуля. Очевидно, L_0 и $L[0, \infty)$ канонически изоморфны. Наша цель — доказать, что из устойчивости уравнения (1) следует обратимость оператора $D : L_0 \to L[0, \infty)$.

Напомним условия обратимости оператора D, полученные в [6].

Определим для всех $\lambda \in \mathbf{C}$ с $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ оператор $\psi(\lambda) : E \to E$ по формуле

$$\psi(\lambda) = I + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda h_m} a_m.$$

$\psi(\lambda)$ можно интерпретировать следующим образом. Обозначим через U_λ ($\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$) пространство функций $x : \mathbf{R} \to E$, имеющих вид $x_h(t) = e^{\lambda t} h$ ($h \in E$). Ясно, что U_λ канонически изоморфно E. Очевидно, оператор D действует в U_λ и имеет вид $(Dx_h)(t) = e^{\lambda t}\psi(\lambda) h$.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор D, рассматриваемый как $D : L_0 \to L[0, \infty)$, был обратим, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ оператор $\psi(\lambda)$ был обратим и* $\sup\{\|[\psi(\lambda)]^{-1}\| : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} < \infty$. *Если D обратим, то оператор D^{-1} — запаздывающий, т. е. удовлетворяет* (3).

Доказательство. Тот факт, что оператор D^{-1} (если он существует) является запаздывающим, следует из теоремы 5 работы [7] (см. также теоремы 6 и 7 из [8]).

Эквивалентность запаздывающей обратимости оператора D (рассматриваемого в пространстве $C(-\infty, \infty)$) условиям теоремы доказана в [6] (теорема 5.2). В нашем случае это утверждение может быть получено такими же рассуждениями.

Теорема 2. *Пусть уравнение (1) устойчиво. Тогда оператор $D : L_0 \to L[0, \infty)$ обратим, причем D^{-1} — запаздывающий.*

Доказательство I. Предположим противное: пусть оператор D не обратим. Покажем, что тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое λ, что оператор $\psi(\lambda)$ обратим, но $\|[\psi(\lambda)]^{-1}\| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Обозначим через M множество точек $\lambda(\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0)$, в которых оператор $\psi(\lambda)$ обратим. Оно не пусто, так как при $\operatorname{Re}\lambda$ стремящемся к бесконечности $\psi(\lambda)$ стремится к единичному оператору. Известно, что если оператор a обратим и $\|a^{-1}\| \times \|b\| < 1$, то оператор $a - b$ также обратим: $(a-b)^{-1} = a^{-1} + a^{-1}ba^{-1} + a^{-1}ba^{-1}ba^{-1} + \ldots$. Отсюда следует, что если бы функция $\lambda \to \|[\psi(\lambda)]^{-1}\|$ была на M ограничена, то M совпадало бы со всей правой полуплоскостью, что в силу теоремы 1 означало бы обратимость оператора D.

Переформулируем полученный результат следующим образом: существует вектор $h \in E$ ($\|h\| = 1$) такой, что $\|\psi(\lambda)h\| \leqslant \varepsilon$.

II. Очевидно, при фиксированном $\gamma \geqslant 0$ функция $\omega \to \psi(\gamma + i\omega)$ — почти периодическая [9]. Поэтому без ограничения общности можно считать, что мнимая часть ω числа λ, найденного в I, как угодно велика.

Это удобно по следующей причине. Обозначим через L^γ пространство измеримых функций $x : \mathbf{R} \to E$, ограниченных по норме $\|x\|_{L^\gamma} = \operatorname{vrai\,sup} |e^{-\gamma t} x(t)|$, а через W^γ — пространство, состоящее из функций $x \in L^\gamma$, ограниченных по норме $\|x\|_{W^\gamma} = \|\dot{x}\|_{L^\gamma} + \|x\|_{L^\gamma}$. Аналогично определим пространства $L^\gamma[a, b]$ и $W^\gamma[a, b]$. Для нас будет важен следующий факт. Функция $x_h(t) = e^{\lambda t} h$ ($\lambda = \gamma + i\omega$) лежит в L^γ и W^γ, причем ее норма в L^γ равна 1, а норма в W^γ — неограниченно растет, когда ω стремится к бесконечности.

Очевидно, операторы D и B можно рассматривать в пространствах $L^\gamma(-\infty, t]$.

III. Покажем, что для любой $g \in L^\gamma[0, \infty)$ решение задачи (5) удовлетворяет оценке

$$\| z \|_{W^\gamma} \leqslant K \| g \|_{L^\gamma[0,\infty)}, \tag{6}$$

где K не зависит от γ и g. Заметим, что в силу следствия 2 леммы при любом фиксированном $t \geqslant 0$ $\| z \|_{W[0,t]} \leqslant K \| g \|_{L[0,t]}$. Очевидно, что $\| g \|_{L[0,t]} \leqslant e^{\gamma t} \| g \|_{L^\gamma[0,t]}$. Отсюда для любого $t \geqslant 0$ $\| z \|_{W[0,t]} \leqslant e^{\gamma t} K \| g \|_{L^\gamma[0,\infty)}$, что равносильно неравенству (6).

IV. Пусть $c : \mathbf{R} \to [0, 1]$ — непрерывно дифференцируемая функция, равная нулю при $t \leqslant 0$ и единице при достаточно больших t. Ясно, что производную функции c можно считать как угодно маленькой.

Рассмотрим функцию $z(t) = c(t) \dfrac{x_h(t)}{\| x_h \|_{W^\gamma}}$. Очевидно, $\| z \|_{W^\gamma} \geqslant 1$. Заметим, что функцию c можно выбрать так, чтобы $\| z \|_{L^\gamma}$ и $\| Dz \|_{L^\gamma}$ были как угодно малы.

V. Рассмотрим задачу (5) с $g(t) = (D\dot{z})(t) + (Bz)(t)$. Решением будет функция z. В силу IV $\| z \|_{W^\gamma} \geqslant 1$, а $\| g \|_{L^\gamma[0,\infty)}$ можно считать как угодно маленькой. Но это противоречит результату III. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, в условиях теоремы 2 задача (5) эквивалентна задаче $\dot{z}(t) + (D^{-1}Bz)(t) = (D^{-1}g)(t)$ $(t \geqslant 0)$, $z(t) = 0$ $(t \leqslant 0)$. Поскольку оператор D^{-1} — запаздывающий, это уравнение является уравнением запаздывающего типа [1 — 2].

Замечание. В работе [10] устойчивость уравнения (1) изучалась в предположении так называемой *D-устойчивости*, т. е. устойчивости уравнения нулевого порядка $Dx = f$.

В [4] показано, что D-устойчивость равносильна запаздывающей обратимости оператора D (ср. это утверждение со следствием 1 леммы). Таким образом, в силу теоремы 2 требование D-устойчивости — необходимо.

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., «Наука», 1971. 296 с.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., «Наука», 1972. 352 с.
3. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М., «Наука», 1977. 600 с.
4. Курбатов В. Г. Об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнен. 17, № 6, с. 963—972.
5. Иосида К. Функциональный анализ. М., «Мир», 1967. 624 с.
6. Курбатов В. Г., Фролов И. С. Об обратимости дифференциальноразностных операторов в банаховом пространстве. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13 марта 1978 г., № 849—78 Деп. 57 с.
7. Курбатов В. Г. Об обратимости запаздывающих операторов.— Сб. «Теория операторных уравнений», Воронеж, 1979, с. 43—52.
8. Курбатов В. Г. Линейные функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа и запаздывающий спектр.— Сиб. мат. журн., 1975, 14, № 3, с. 538—550.
9. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., изд-во МГУ, 1978. 204 с.
10. Cruz M. A. Hale J. K. Stability of functional differential equations of neutral type.— J. Differential Eq., 1970, 7, № 2, p. 334—355.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 6.04.1980 г.