УДК 517.948.34

В. Н. Лаптинский

О периодических решениях интегро-дифференциальных уравнений

Вопросам существования и построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений посвящены исследования ряда авторов (см., например [1—5]). В этом сообщении предложенный в [6] метод построения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений распространяется на интегро-дифференциальные уравнения вида

$$\dot{x}(t) = \int_0^t K(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau + f(t), \quad \left(\dot{\ }\right) = \frac{d}{dt}, \tag{1}$$

где x, f суть n-мерные векторы, $K(t, \tau)$ — $(n \times n)$-матрица; $K(t, \tau)$ и $f(t)$ непрерывны по своим аргументам и периодичны по t и τ с периодом $\omega > 0$. Кроме того, предполагаем, что $K(t, \tau)$ непрерывно дифференцируема по t)

Следуя [6], введем в (1) скалярный параметр λ следующим образом:

$$\dot{x}(t, \lambda) = \lambda \int_0^t K(t, \tau)\, x(\tau, \lambda)\, d\tau + f(t). \tag{2}$$

Поскольку оператор K:

$$Kx = \int_0^t K(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

не всякую ω-периодическую вектор-функцию переводит в ω-периодическую, то при выяснении вопроса существования ω-периодических решений уравнения (2) следует (см. [2]) наложить условие

$$\int_0^\omega K(t, \tau)\, x(\tau, \lambda)\, d\tau = 0, \quad \forall\, t, \lambda. \tag{3}$$

Так как

$$x(\tau, \lambda) = x(t, \lambda) + \int_t^\tau \dot{x}(\sigma, \lambda)\, d\sigma, \tag{4}$$

то из (3) имеем

$$\int_0^\omega K(t, \tau)\, d\tau x(t, \lambda) = \int_0^\omega K(t, \tau)\, d\tau \int_\tau^t \dot{x}(\sigma, \lambda)\, d\sigma. \tag{5}$$

Пусть $\det \int_0^\omega K(t, \tau)\, d\tau \neq 0, \quad \forall\, t \in [0, \omega]$, тогда из (5) следует

$$x(t, \lambda) = H^{-1}(t, \omega) \int_0^\omega K(t, \tau)\, d\tau \int_\tau^t \dot{x}(\sigma, \lambda)\, d\sigma, \tag{6}$$

где $H(t, \omega) = \int_0^\omega K(t, \tau)\, d\tau$. Записывая условие $x(\omega, \lambda) = x(0, \lambda)$ в виде $\int_0^\omega \dot{x}(\tau, \lambda)\, d\tau = 0$ и учитывая, что $\dot{x}(\tau, \lambda) = \dot{x}(t, \lambda) + \int_t^\tau \ddot{x}(\sigma, \lambda)\, d\sigma$, получим согласно уравнению (2)

$$\dot{x}(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\omega} \int_0^\omega d\tau \int_\tau^t \left[K(\sigma, \sigma)\, x(\sigma, \lambda) + \int_0^\sigma K'_\sigma(\sigma, s)\, x(s, \lambda)\, ds \right] d\sigma +$$
$$+ f(t) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Соотношения (6), (7) можно рассматривать как систему интегральных уравнений относительно x, $\dot{x}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при условии $\partial H^{-1}(t, \omega) K(t, \tau)/\partial t = 0$, $\forall (t, \tau)$, задачи об ω-периодических решениях этой системы и уравнения (2) эквивалентны.

Решение системы (6), (7) ищем (следуя [6]) в виде ряда

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} x_{-1}(t) + x_0(t) + \lambda x_1(t) + \ldots . \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнение (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$x_k(t) = H^{-1}(t, \omega) \int_0^{\omega} K(t, \tau) d\tau \int_{\tau}^{t} \dot{x}_k(\sigma) d\sigma, \quad k = -1, 0, 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Аналогичным образом из (7) найдем $\dot{x}_{-1} \equiv 0$, $\dot{x}_0(t) = f(t) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(\tau) d\tau$,

$$\dot{x}_k(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} d\tau \int_{\tau}^{t} \left[K(\sigma, \sigma) x_{k-1}(\sigma) + \int_0^{\sigma} K'_{\sigma}(\sigma, s) x_{k-1}(s) ds \right] d\sigma, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

а затем по формуле (9) найдем последовательно вектор-функции $x_k(t)$.

Докажем сходимость (равномерную по t) построенного ряда.

Пусть $\left| f(t) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(\tau) d\tau \right| \leqslant h$, $|H^{-1}(t, \omega)| \leqslant \gamma$, $t \in [0, \omega]$, $|K(t, \tau)| \leqslant$

$\leqslant \alpha$, $|K(t, t)| \leqslant \alpha_1$, $|K'_t(t, \tau)| \leqslant \beta$, $(t, \tau) \in [0, \omega]$, $h, \gamma, \alpha, \alpha_1, \beta = \text{const}$;

$\| x \| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} | x(t) |$. Здесь через $| \ldots |$ обозначена какая-либо норма (согласованная) в R^n. Норму матрицы $H^{-1}(t, \omega) K(t, \tau)$ можно оценивать одной постоянной, но мы вводим раздельные оценки по аналогии с [6].

Для $\| x_0 \|$ имеет место следующая оценка: $\| x_0 \| \leqslant 1/(2\gamma\alpha\omega^2 h)$.

Из (10) следует $|\dot{x}_k(t)| \leqslant \frac{1}{2\omega} \left[\alpha_1 (2t^2 - 2\omega t + \omega^2) + \beta \left(\frac{4}{3} t^3 - \omega t^2 + \frac{1}{3} \omega^3 \right) \right] \| x_{k-1} \|$.

Затем из (9) находим оценку для $\| x_k \|$: $\| x_k \| \leqslant q \| x_{k-1} \|$, где $q = \frac{\gamma\alpha\omega^3}{6} \left(\alpha_1 + \frac{11}{20} \beta\omega \right)$.

Отсюда следует, что ряд в (8) сходится равномерно относительно t при условии $|\lambda| < \frac{120}{\gamma\alpha\omega^3 (20\alpha_1 + 11\beta\omega)}$.

Таким образом, нами получен следующий результат.

Теорема. *При выполнении условий* $\det H(t, \omega) \neq 0$, $\partial H^{-1}(t, \omega) K(t, \tau)/\partial t = 0$, $q < 1$ *ω-периодическое решение уравнения* (1) *существует, оно единственно и представимо в виде ряда* (8), *в котором следует положить* $\lambda = 1$.

Вопрос существования нами решен. Единственность решения нетрудно показать методом от противного, исходя из системы (6), (7).

Замечание 1. Предложенный алгоритм построения ω-периодического решения уравнения (1) имеет итерационный аналог, заключающийся в том, что решение системы (6), (7) следует искать (при $\lambda = 1$) по схеме

$$x_m(t) = H^{-1}(t, \omega) \int_0^\omega K(t, \tau)\, d\tau \int_\tau^t \dot{x}_m(\sigma)\, d\sigma,$$

$$\dot{x}_m(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega d\tau \int_\tau^t \left[K(\sigma, \sigma)\, x_{m-1}(\sigma) + \int_0^\sigma K'_\sigma(\sigma, s)\, x_{m-1}(s)\, ds \right] d\sigma + $$

$$+ f(t) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, x_1 \equiv 0$.

Это обстоятельство позволяет применить предложенный здесь подход также к интегро-дифференциальным уравнениям более общего вида (см. [2]).

Замечание 2. Вместо полученного в (11) выражения для $\dot{x}_m(t)$ можно брать следующее

$$\dot{x}_m(t) = \int_0^t K(t, \tau)\, x_{m-1}(\tau)\, d\tau - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau K(\tau, s)\, x_{m-1}(s)\, ds +$$

$$+ f(t) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(\tau)\, d\tau.$$

Формально оно вытекает из (11) и согласуется с выражением для $\dot{x}(t)$ (см. [2]). Этот факт указывает на связь между предлагаемым здесь подходом и методом из [2].

Алгоритм построения последовательных приближений в этом случае имеет вид

$$x_m(t) = H^{-1}(t, \omega) \times$$

$$\times \int_0^\omega K(t, \tau)\, d\tau \int_\tau^t \left[\int_0^\sigma K(\sigma, s)\, x_{m-1}(s)\, ds - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau K(\tau, s)\, x_{m-1}(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + f(\sigma) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(\tau)\, d\tau \right] d\sigma. \tag{12}$$

Для вывода оценки скорости сходимости применим методику (упрощенный вариант), приведенную в [4].

Согласно лемме 1 из [4] имеем

$$\left| \int_0^t K(t, \tau)\, u_{m-1}(\tau)\, d\tau \right| = \left| \int_0^t \left[K(t, \tau)\, u_{m-1}(\tau) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega K(t, \tau)\, u_{m-1}(\tau)\, d\tau \right] d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2t \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \alpha \| u_{m-1} \| \leqslant \frac{\alpha\omega}{2} \| u_{m-1} \|, \quad \left| \int_\tau^t d\sigma \left[\int_0^\sigma K(\sigma, s)\, u_{m-1}(s)\, ds - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau K(\tau, s)\, u_{m-1}(s)\, ds \right] \right| \leqslant |t - \tau| (\omega + \tau - t)\, \alpha \| u_{m-1} \|,$$

где $u_{m-1}(t) = x_m(t) - x_{m-1}(t)$.

На основе этих оценок получим из (12) $\| u_m \| \leqslant \frac{1}{6} \gamma \alpha^2 \omega^3 \| u_{m-1} \|$.

Несложный анализ показывает, что алгоритмы (11), (12) имеют приблизительно равные скорости сходимости. Хотя первый из них предполагает гладкость по t матрицы $K(t, \tau)$, однако в ряде случаев он приводит к более простым вычислительным формулам при нахождении решения.

Отметим еще, что оценки скорости сходимости полученных алгоритмов можно несколько улучшить, если, исходя из оценки для $\|x_0\|$, строить последовательным интегрированием функциональные оценки для $|u_m(t)|$, причем в случае алгоритма (12) применяем методику из [4].

1. Быков Я. В., Иманалиев М. О периодических, почти периодических и ограниченных решениях одного класса интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производной.— В кн.: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, вып. 2, Изд-во АН КиргССР, Фрунзе, 1962, с. 3—20.
2. Вахабов Г. Численно-аналитический метод исследования периодических систем интегро-дифференциальных уравнений.— УМЖ, 1969, 21, № 5, с. 675—683.
3. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «ФАН», 1971. 278 с.
4. Самойленко А. М. Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев, «Вища школа», 1976, 179 с.
5. Самойленко А. М., Нуржанов О. Д. Метод Бубнова— Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.— ДУ, 1979, 15, № 8, с. 1503— 1517.
6. Лаптинский В. Н. Об одном алгоритме построения периодических решений линейных систем второго порядка.— Известия АН БССР. Серия физ.-мат. наук. 1978, № 3, с. 113—116.

Могилевское отделение
Института физики АН БССР

Поступила в редакцию
23.05.1980 г.