УДК 517.5

В. В. Рехлицкий

О распределении нулей экспоненциальных квазиполиномов

В работах [1] и [2] изучено расположение нулей квазиполиномов вида:

$$L(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{a_k \lambda}, \ C_k = \text{const}, \ 3 \leqslant N < \infty.$$

Точки a_k — вершины выпуклого многоугольника, содержащего внутри точку $z = 0$.

В ряде работ изучалось распределение нулей квазиполиномов более общего вида. Например, в работе [3] установлены оценки для количества нулей квазиполинома вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) \exp(\omega_k z)$$

в некоторых прямоугольниках.

В работе [4] приведены некоторые процедуры, позволяющие оценивать число нулей

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\rho(k)} a_{kj} z^{j-1} e^{\omega_k z}$$

в круге заданого радиуса.

В данной работе, используя метод из [2], мы изучим асимптотику распределения нулей квазиполинома

$$L(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} P_k^{(m_k)}(\lambda)\, e^{a_k \lambda}, \ 3 \leqslant N < \infty, \tag{1}$$

точки a_k — также — вершины выпуклого многоугольника, содержащего внутри точку $z = 0$, и $P_k^{(m_k)}(\lambda)$ — многочлены некоторых степеней m_k:

$$P_k^{(m_k)}(\lambda) = b_0^{(k)} \lambda^{m_k} + b_1^{(k)} \lambda^{m_k - 1} + \ldots + b_{m_k}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, N).$$

Справедлива следующая теорема:

При достаточно больших $n < \Lambda$ ($\Lambda = \text{const}$) *нули* $\lambda_n^{(k)}$ ($n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, N$) *функции* (1) *расположены в окрестностях точек*

$$\bar{\lambda}_n^{(k)} = \frac{(2n-1)\pi}{i(a_k - a_{k+1})} - C_k \ln \frac{(2n-1)\pi}{i(a_k - a_{k+1})} - \frac{1}{i(a_k - a_{k+1})} \ln \frac{b_0}{b_0^{(k+1)}} + {}$$
$$+ C_k^2 \frac{\ln \dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_k - a_{k+1})}}{\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_k - a_{k+1})}}, \quad C_k = \frac{m_k - m_{k+1}}{i(a_k - a_{k+1})}. \tag{2}$$

Так что справедлива оценка

$$|\lambda_n^{(k)} - \bar{\lambda}_n^{(k)}| = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Зафиксировав какое-нибудь натуральное число $j < N$, следуя работе [2], получим, что при $|\lambda| > R$, где R — радиус круга, содержащего все нули многочленов $P_k^{(m_k)}(\lambda)$, справедливо равенство

$$L(\lambda) = P_j^{(m_j)}(\lambda)\, e^{a_j \lambda} + P_{j+1}^{(m_{j+1})}(\lambda)\, e^{a_{j+1}\lambda} + \sum_{k \neq j, j+1}^{N} P_k^{(m_k)}(\lambda)\, e^{a_k \lambda} =$$
$$= e^{\frac{1}{2}(a_j \lambda + \ln P_j^{(m_j)}(\lambda) - a_{j+1}\lambda - \ln P_{j+1}^{(m_{j+1})}(\lambda))} [R_1(\lambda) + R_2(\lambda)],$$

где

$$R_1(\lambda) = 2\cos i\,\frac{(a_j - a_{j+1})\lambda + \ln P_j^{(m_j)}(\lambda) - \ln P_{j+1}^{(m_{j+1})}(\lambda)}{2},$$

$$R_2(\lambda) = \sum_{k\neq j,j+1}^{N} e^{a_k\lambda + \ln P_k^{(m_k)}(\lambda) - \frac{a_j\lambda + \ln P_j^{(m_j)}(\lambda) + a_{j+1}\lambda + \ln P_{j+1}^{(m_{j+1})}(\lambda)}{2}}.$$

Для удобства обозначений в дальнейшем многочлен $P_j^{(m_j)}(\lambda)$ будем обозначать $P_j(\lambda)$.

Нули функции $R_1(\lambda)$ определяются из уравнения

$$\lambda + C_j \ln\lambda + \frac{1}{i(a_j - a_{j+1})}\ln\frac{b_0^{(j)} + \frac{b_1^{(j)}}{\lambda} + \ldots + \frac{b_{m_j}^{(j)}}{\lambda^{m_j}}}{b_0^{(j+1)} + \frac{b_1^{(j+1)}}{\lambda} + \ldots + \frac{b_{m_{j+1}}^{(j+1)}}{\lambda^{m_{j+1}}}} - \frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})} = 0, \tag{4}$$

где $C_j = \frac{m_j - m_{j+1}}{i(a_j - a_{j+1})}$. Левую часть (4) обозначим через $\widetilde{R}_1(\lambda)$. Пусть точки $\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}$ — нули функции $\widetilde{R}_1(\lambda)$. Положим

$$\bar{\lambda}_n^{(j)} = \frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})} - C_j \ln\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})} - \frac{1}{i(a_j - a_{j+1})}\ln\frac{b_0^{(j)}}{b_0^{(j+1)}} + C_j^2\,\frac{\ln\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}}{\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}}.$$

Оценим $|\widetilde{R}_1(\bar{\lambda}_n^{(j)})|$:

$$|\widetilde{R}_1(\bar{\lambda}_n^{(j)})| = \left| C_j \ln\left[1 - \left(C_j\frac{\ln\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}}{\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}} + \frac{1}{i(a_j - a_{j+1})}\times\frac{\ln\frac{b_0^{(j)}}{b_0^{(j+1)}}}{\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}} - C_j^2\frac{\ln\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}}{\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}}\right)\right] + \frac{1}{i(a_j - a_{j+1})}\times\ln\frac{1 + \frac{b_1^{(j)}}{b_0^{(j)}\bar{\lambda}_n^{(j)}} + \ldots + \frac{b_{m_j}^{(j)}}{b_0^{(j)}(\bar{\lambda}_n^{(j)})^{m_j}}}{1 + \frac{b_1^{(j+1)}}{b_0^{(j+1)}\bar{\lambda}_n^{(j)}} + \ldots + \frac{b_{m_{j+1}}^{(j+1)}}{b_0^{(j+1)}(\bar{\lambda}_n^{(j)})^{m_{j+1}}}} + C_j^2\frac{\ln\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}}{\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}}\right|. \tag{5}$$

Выражение в круглых скобках равенства (5) обозначим $\alpha_{n,j}$. Используя тейлоровское разложение $\ln(1 - \alpha_{nj})$, находим, что

$$|R_1(\bar{\lambda}_n^{(j)}) = \left| -C_j^2\frac{\ln\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}}{\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j - a_{j+1})}} - \frac{C_j}{i(a_j - a_{j+1})}\right..$$

$$\frac{\ln\dfrac{b_0^{(j)}}{b_0^{(j+1)}}}{\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}} + C_j^3\frac{\ln\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}}{\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(-C_j^2\frac{\ln\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}}{\dfrac{(2n-1)n}{i(a_j-a_{j+1})}} -\right.$$

$$\left. - \frac{C_j}{i(a_j-a_{j+1})}\frac{\ln\dfrac{b_0^{(j)}}{b_0^{(j+1)}}}{\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}} + C_j^3\frac{\ln\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}}{\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}\right)^2}\right)^2 - \ldots +$$

$$+ \frac{1}{i(a_j-a_{j+1})}\ln\frac{1+\dfrac{b_1^j}{b_0^{(j)}\bar{\lambda}_n^{(j)}}+\ldots+\dfrac{b_{m_j}^{(j)}}{b_0^{(j)}(\bar{\lambda}_n^{(j)})^{m_j}}}{1+\dfrac{b_1^{(j+1)}}{b_0^{(j+1)}\bar{\lambda}_n^{(j)}}+\ldots+\dfrac{b_{m_{j+1}}^{(j+1)}}{b_0^{(j+1)}(\bar{\lambda}_n^{(j)})^{m_{j+1}}}} -$$

$$\left. - C_j^2\frac{\ln\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}}{\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}}\right|.$$

Отсюда следует, что $\widetilde{R}_1(\bar{\lambda}_n^{(j)}) = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Оценим $|\bar{\lambda}_n^{(j)} - \overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}|$. Имеем:

$$\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} = \frac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})} - C_j\ln\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} - \frac{1}{i(a_j-a_{j+1})}\ln\left(b_0^{(j)}+\ldots+\right.$$

$$\left. + \frac{b_{m_j}^{(j)}}{(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})^{m_j}}\right)\frac{1}{i(a_j-a_{j+1})}\ln\left(b_0^{(j+1)}+\ldots+\frac{b_{m_{j+1}}^{(j+1)}}{(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})^{m_{j+1}}}\right.,$$

$$|\bar{\lambda}_n^{(j)} - \overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}| = \left|\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{i+1})} - C_j\ln\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})} - \frac{1}{i(a_j-a_{j+1})}\right.$$

$$\ln\frac{b_0^{(j)}}{b_0^{(j+1)}} + C_j^2\frac{\ln\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}}{\dfrac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})}} - \frac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})} + C_j\ln\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} +$$

$$+ \frac{1}{i(a_j-a_{j+1})}\ln\left(b_0^{(j)}+\ldots+\frac{b_{m_j}^{(j)}}{(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})^{m_j}} - \frac{1}{i(a_j-a_{j+1})}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\left(b_0^{(j+1)}+\ldots+\frac{b_{m_{j+1}}^{(j+1)}}{(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})^{m_{j+1}}}\right)\right|.$$

Снова используя тейлоровское разложение логарифма, после сокращения найдем, что

$$|\bar{\lambda}_n^{(j)} - \overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}| = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6}$$

Обозначим через $L_n^{(j)}$ луч $L_n^{(j)} \overset{\mathrm{df}}{=} \{re^{-i\arg\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}},\ r>0\}$, через $D_n^{(j)} = D_n^{(j)}(\varepsilon)$— — область $D_n^{(j)}(\varepsilon) = \{\lambda : \lambda = \overset{0}{\lambda}{}^{(j)} + \rho,\ |\rho| \leqslant \varepsilon\}$, и при любом d через $\Pi_{L_n^{(j)}}d$ — величину проекции вектора d на направление оси $L_n^{(j)}$:

$$L_n^{(j)} : \Pi_{L_n^{(j)}}d = d\cos\varphi,\quad \varphi = \arg d + \arg\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)};$$

число $\varepsilon > 0$ будем считать всегда настолько малым, чтобы различные области $D_n^{(j)}(\varepsilon)$ между собой не пересекались. С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые проводились в работе [2], найдем, что при $n > \Lambda_2$ ($\Lambda_2 = \text{const}$) и $\lambda \in D_n^{(j)}(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|R_2(\lambda)| < Ae^{-C_3|\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}|}, \quad A = \text{const}, \ C_3 = C_2 - \varepsilon. \tag{7}$$

Так как $|\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} - \bar{\lambda}_n^{(j)}| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то при достаточно больших $n > \Lambda_3$ $\bar{\lambda}_n^{(j)} \in D_n^{(j)}(\varepsilon)$. С другой стороны, при достаточно больших $n > \Lambda_4$ ($\Lambda_4 = \text{const}$) в точках $\lambda = \overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} + \gamma$, $|\gamma| < \varepsilon$, получим оценку:

$$|R_1(\lambda)| = 2\left|\cos i\,\frac{(a_j - a_{j+1})(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} + \gamma) + \ln P_j(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} + \gamma) - \ln P_{j+1}(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} + \gamma)}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\cos\left(i\,\frac{(a_j - a_{j+1})\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} + \ln P_j(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}) - \ln P_{j+1}(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + i\,\frac{(a_j - a_{j+1})\gamma + \ln\left(1 + \dfrac{P_j(\gamma)}{P_j(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{P_{j+1}(\gamma)}{P_{j+1}(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})}\right)}{2}\right)\right|.$$

Обозначим $$\overset{\approx}{R}_1(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}) = \frac{i\left[(a_j - a_{j+1})\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} + \ln P_j(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}) - \ln P_{j+1}(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})\right]}{2},$$

$$\overset{\approx\approx}{R}_1(\gamma) = \frac{i\left[(a_j - a_{j+1})\gamma + \ln\left(1 + \dfrac{P_j(\gamma)}{P_j(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{P_{j+1}(\gamma)}{P_{j+1}(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})}\right)\right]}{2},$$

тогда

$$|R_1(\lambda)| = 2|\cos(\overset{\approx}{R}_1(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}) + \overset{\approx\approx}{R}_1(\gamma))| = 2|\cos\overset{\approx}{R}_1(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})\cos\overset{\approx\approx}{R}_1(\gamma) -$$

$$- \sin\overset{\approx}{R}_1(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})\sin\overset{\approx\approx}{R}_1(\gamma)| = 2|\sin\overset{\approx\approx}{R}_1(\gamma)|,$$

так как

$$\ln\left(1 - \frac{P_j(\gamma)}{P_j(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})}\right) = O\left(\frac{P_j(\gamma)}{P_j(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})}\right) \to 0 \quad (|P_j(\gamma)| < C_1),$$

то

$$|R_1(\lambda)| > C_1|a_j - a_{j+1}|\gamma > C_2 > 0. \tag{8}$$

Пусть $\Lambda = \max(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4)$. Положим $|\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} - \bar{\lambda}_n^{(j)}| = r_n^{(j)}$. Тогда при $n > \Lambda$ на границы кружков $D_n^{(j)}(r_n^{(j)})$ в силу оценок (7) и (8) имеем $|R_1(\lambda)| > |R_2(\lambda)|$.

Согласно теореме Руше в каждом кружке $D_n^{(j)}(r_n^{(j)})$. Функция $L(\lambda)$ имеет столько нулей, сколько и функция $R_1(\lambda)$. Но функция $R_1(\lambda)$ имеет в каждом кружке один нуль $\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}$. Поэтому и функция $L(\lambda)$ имеет в каждом из этих кружков один нуль $\lambda_n^{(j)}$. Из оценки (6) следует (3). ■

1. Леонтьев А. Ф. О представлении аналитических функций в замкнутой выпуклой области рядами Дирихле.— Изв. АН СССР 1973, **37**, 3, *577—592*.
2. Дзядык В. К. Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках.— Мат. сб., 1974, 95, *475—493*.
3. Voorhoeve M. On the oscillation of exponential polynomiale.— Mat. Z. 1976, 151, 3, *217—293*.
4. Poorten A. J. van der. On the humber of zeros of functions.— Ensegin. math., 1977. **23**, 1/2, *19—38*.

Дрогобычский
педагогический институт

Поступила в редакцию
15.12.1980 г.