УДК 517.917

Ю. И. Домшлак

Теоремы сравнения типа Штурма для дифференциальных уравнений первого и второго порядков со знакопеременными отклонениями аргумента

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения первого и второго порядков с несколькими сосредоточенными отклонениями аргумента

$$l\{x\} \equiv x'(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x[r_i(t)] = 0, \quad t \in (t_1, t_2); \tag{1}$$

$$L\{x\} \equiv x''(t) + a(t)\, x(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x[r_i(t)] = 0, \quad t \in (t_1, t_2). \tag{2}$$

Здесь $a(t)$, $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ — кусочно-непрерывны; $r_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ — непрерывно дифференцируемые монотонно возрастающие функции, определенные на (t_1, t_2). Как правило, область значений функции $r_i(t)$ не включает целиком интервал (t_1, t_2). Поэтому доопределим $r_i(t)$ произвольным образом с сохранением гладкости и монотонности на $I \supset (t_1, t_2)$ так, чтобы область значений функции $r_i(t)$ содержала (t_1, t_2). Тогда существует определенная на (t_1, t_2) непрерывно дифференцируемая $q_i(t)$, обратная к $r_i(t)$, т. е. $r_i[q_i(t)] \equiv \equiv q_i[r_i(t)] \equiv t$.

Введем следующие обозначения: $\alpha_i(t) = \max\{t;\ q_i(t)\}$, $\beta_i(t) = \min\{t; q_i(t)\}$, $e_{\text{ext}}^{(i)} = \{t \bar{\in} (t_1, t_2) : r_i(t) \in (t_1, t_2)\}$, $e_{\text{int}}^{(i)} = \{t \in (t_1, t_2) : r_i(t) \bar{\in} (t_1, t_2)\}$, $\widetilde{e}_{\text{ext}}^{(i)} = \{t : t = r(s),\ s = e_{\text{int}}^{(i)}\}$, $E_{\text{ext}} = \bigcup_1^n e_{\text{ext}}^{(i)}$, $E_{\text{int}} = \cup e_{\text{int}}^{(i)}$, $\widetilde{E}_{\text{ext}} = \bigcup_1^n \widetilde{e}_{\text{ext}}^{(i)}$.

Рассмотрим связанные с (1), (2) дифференциальные неравенства

$$\tilde{l}\{y\} \equiv -y'(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i'(t)\, b_i[q_i(t)]\, y[q_i(t)] \geqslant 0, \quad t \in (t_1, t_2), \tag{3}$$

$$\widetilde{L}\{y\} \equiv y''(t) + b(t)\, y(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i'(t)\, b_i[q_i(t)]\, y[q_i(t)] \geqslant 0, \quad t \in (t_1, t_2), \tag{4}$$

где $b(t)$, $b_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, — кусочно-непрерывные функции, определенные на (t_1, t_2) и $e_{\text{ext}}^{(i)} \cup (t_1, t_2) \setminus e_{\text{int}}^{(i)}$ соответственно.

Решением (1) {(3)} назовем абсолютно непрерывную на $[t_1, t_2] \cup \widetilde{E}_{\text{ext}}$ $\{[t_1, t_2] \cup E_{\text{ext}}\}$ функцию $x(t)$ $\{y(t)\}$, удовлетворяющую (1) {(3)} на (t_1, t_2). Аналогично определяется понятие решения (2) или (4).

Определение 1. *Интервал (t_1, t_2) называется большим положительным полуциклом (б.п.п.) неравенства (3), если $q_i(t_1) < t_2$, $q_i(t_2) > t_1$, $i = \overline{1, n}$, и существует его решение $y(t)$ такое, что $y(t_1) = y(t_2) = 0$, $y(t) > 0$ на (t_1, t_2) (см. также [1]). Промежуток $[t_1, t_2] \cup E_{\text{ext}}$ будем в этом случае называть расширенным б.п.п. Если дополнительно $y(t) \leqslant 0$ для $t \in \in E_{\text{ext}}$, то б.п.п. назовем правильным положительным полуциклом (п.п.п.).*

Определение п.п.п. для уравнения (1), а также для неравенств (3) и (4), дается аналогично.

Если $a(t) \geqslant b(t)$ на полуоси (t_0, ∞), то согласно теореме Штурма колеблемость хотя бы одного решения уравнения

$$y''(t) + b(t)\, y(t) = 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{5}$$

влечет за собой колеблемость всех решений уравнения

$$x''(t) + a(t)\, x(t) = 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{6}$$

а неколеблемость хотя бы одного решения (5) — неколеблемость всех решений (6).

Эта теорема обобщалась (в основном в части получения признаков колеблемости решений) на уравнения с отклонением аргумента, в том числе на нелинейные, а также на уравнения высоких порядков, различными авторами (см. [2—6]). Рассмотрен также случай одного отклонения сложной природы [11]. Заметим, однако, что эта теорема — следствие основной теоремы сравнения Штурма, носящей сугубо локальный характер: если $a(t) \geqslant b(t)$ на некотором полуцикле (t_1, t_2) уравнения (5), то у любого решения уравнения (6) имеется хотя бы один нуль на $[t_1, t_2]$. Аналогов этой теоремы сравнения для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в литературе до сих пор не имелось.

Приведем аналог для пар (1), (3) и (2), (4), а также аналог теоремы Штурма о разделении нулей решений уравнения (6). Случай одного чистого запаздывания или одного чистого опережения рассмотрен в [7]. Часть из изложенных здесь результатов содержится в [8].

Теорема 1. *Пусть* 1) *интервал* (t_1, t_2) *есть п.п.п. неравенства* (3) {*неравенства* (4)};

$$2)\ a(t) \geqslant b(t),\ t \in (t_1, t_2),\ a_i(t) \geqslant b_i(t),\ t \in (t_1, t_2) \setminus e_{\text{int}}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}; \tag{7}$$

$$3)\ a_i(t) \geqslant 0,\ t \in e_{\text{int}}^{(i)},\ b_i(t) \geqslant 0,\ t \in e_{\text{ext}}^{(i)}; \quad i = \overline{1, n}; \tag{8}$$

4) *хотя бы одно из неравенств* (7), (8) *или же* (3) {(4)} *превращается в строгое на некотором подынтервале. Тогда любое решение уравнения* (1) {(2)} *имеет хотя бы один нуль на* $[t_1, t_2] \cup \widetilde{E}_{\text{ext}}$.

Проведем доказательство для пары (1)—(3). Оно базируется на основном тождестве

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\, \widetilde{l}\{y\}\, dt + \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ \int_{(t_1, t_2) \setminus e_{\text{int}}^{(i)}} [a_i(t) - b_i(t)]\, x[r_i(t)]\, y(t)\, dt +$$

$$+ \int_{e_{\text{int}}^{(i)}} a_i(t)\, x[r_i(t)]\, y(t)\, dt - \int_{e_{\text{ext}}^{(i)}} b_i(t)\, x[r_i(t)]\, y(t)\, dt \Bigg\} = -x(t_2)\, y(t_2) + x(t_1)\, y(t_1), \tag{9}$$

справедливом для любого решения $x(t)$ уравнения (1) и любой функции $y(t)$, что нетрудно проверить непосредственно, записав его в развернутом виде с учетом равенств $e_{\text{ext}}^{(i)} = (\beta_i(t_1), t_1) \cup (t_2, \alpha_i(t_2))$, $e_{\text{int}}^{(i)} = (t_1, \alpha_i(t_1)) \cup (\beta_i(t_2), t_2)$, проинтегрировав один раз по частям и выполнив в некоторых слагаемых замену переменных.

Пусть $y(t)$ — решение (3), соответствующее п. п. п. (t_1, t_2). Тогда $y(t) > 0$ на (t_1, t_2) и $y(t) \leqslant 0$ на E_{ext}. Предположим, в противовес утверждению теоремы, что среди решений (1) есть $x(t)$, положительное на $(t_1, t_2) \cup \widetilde{E}_{\text{ext}}$, которое и подставим в (9). Тогда в силу (2), (7) и (8) все слагаемые в левой части (9) неотрицательны, а в силу условия 4) хотя бы одно из них строго положительно. Но правая часть (9) равна нулю, поскольку $y(t_1) = y(t_2) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Для пары (2)—(4) доказательство аналогично. Здесь надо исходить из тождества

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\widetilde{L}\{y\}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} [a(t) - b(t)]\,x(t)\,y(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{(t_1,t_2)\setminus e_{\mathrm{int}}^{(i)}} [a_i(t) - b_i(t)] \times \right.$$

$$\left. \times\, x[r_i(t)]\,y(t)\,dt + \int_{e_{\mathrm{int}}^{(i)}} a_i(t)\,x[r_i(t)]\,y(t)\,dt - \int_{e_{\mathrm{ext}}^{(i)}} b_i(t)\,x[r_i(t)]\,y(t)\,dt \right\} =$$

$$= -x'(t_2)\,y(t_2) + x'(t_1)\,y(t_1) + x(t_2)\,y'(t_2) - x(t_1)\,y'(t_1), \qquad (10)$$

справедливого для любого решения $x(t)$ уравнения (2) и любой функции $y(t)$. Если $(t_1,\ t_2)$ — п.п.п. неравенства (4) и $y(t)$ — соответствующее его решение, то предположение о том, что (2) имеет положительное на $(t_1,\ t_2) \cup$ $\cup\, \widetilde{E}_{\mathrm{ext}}$ решение $x(t)$, снова приводит к противоречию, поскольку правая часть (10) неположительна, а левая — строго положительна.

Определение 2. *Неравенство или уравнение* (1)—(4), *определенное на полуоси, назовем правильно колебательным, если для любого T существуют $t_2 > t_1 \geqslant T$ такие, что $(t_1,\ t_2)$ — его п.п.п. В противном случае неравенство или уравнение назовем правильно неколебательным.*

Следствие 1. *Пусть неравенство* (3) $\{(4)\}$ — *правильно колебательно, и для некоторой последовательности его полуциклов $(t_1^{(k)},\ t_2^{(k)})$, $t_1^{(k)} \to \to \infty$, удовлетворены условия теоремы 1. Тогда все решения уравнения* (1) $\{(2)\}$ — *колеблющиеся.*

Это следствие позволяет получить признаки колеблемости всех решений уравнения для случая, когда на его коэффициенты накладываются условия не на всей полуоси, а лишь на некоторой последовательности как угодно редко расположенных интервалов. Такого рода признаки имеются лишь в работе [9] для решений двучленного уравнения любого четного порядка с одним отклонением вида $x^{2k}\ (t) + a(t)\,x[r(t)] = 0$. Теорема 1 для уравнений порядка выше второго неприменима, но для уравнений второго порядка дает лучшие результаты при конструировании конкретных признаков колеблемости всех решений уравнений вида (2), в том числе и для двучленных.

Следствие 2. *Если уравнение* (1) $\{(2)\}$, *определенное на полуоси, имеет хотя бы одно неколеблющееся решение, и на* $(t_0,\ \infty)$ *справедливо* (7), *то неравенство* (3) $\{(4)\}$ — *правильно неколебательное.*

Следствия 1 и 2 составляют полный аналог теоремы сравнения Штурма о колеблемости и неколеблемости решений для уравнений (5), (6).

Пусть, в частности, в уравнении (2), (4) $n = 2m$, $r_{m+i}(t) \equiv q_i(t)$, $a_{m+i}(t) \equiv q_i'(t)\,a_i[q_i(t)]$, $i = \overline{1, m}$, $b(t) \equiv a(t)$, $b_i(t) \equiv a_i(t)$, $i = \overline{1, 2m}$. В этом и только в этом случае уравнение $L\{x\} = 0$ равносильно уравнению $\widetilde{L}\{y\} = 0$. Это позволяет сформулировать для уравнения

$$x''(t) + a(t)\,x(t) + \sum_{i=1}^{m} \{a_i(t)\,x[r_i(t)] + q_i'(t)\,a_i[q_i(t)]\,x[q_i(t)]\} = 0 \qquad (11)$$

полный аналог классической сепарационной теоремы Штурма, согласно которой никакой полуцикл уравнения (6) не лежит внутри другого. Этот аналог выражается следующим следствием из теоремы 1.

Следствие 3. *Никакой полуцикл уравнения* (11), *на котором $a_i(t) \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, не содержит внутри себя расширенного правильного полуцикла.*

Теорема 1, следствие 1 и 2 могут служить источником получения целых семейств признаков колеблемости всех решений, правильной неколеблемости, выделения промежутков локализации нулей решений уравнений (1) или (2) Это сделано в [7, 8] для уравнений (1) и (2) в случае $n = 1$, $r(t) < t$, для уравнения (1) в случае $n = 2$, $r_1(t) \leqslant t$, $r_2(t) \leqslant t$, $r_1(t) + r_2(t) < 2t$, а также для уравнения (1) при $n=2$, $r_1(t)<t$, $r_2(t)\geqslant t$. Не вдаваясь в подробности и не стремясь к наибольшей общности, приведем некоторые из полученных в этом направлении результатов.

1. Пусть $r(t)<t$ на (t_1, t_2), $a(t)\geqslant 0$ на $(t_1, q(t_1))$, $\int\limits_{q(t_1)}^{q(t)} a(s)\,ds\geqslant 0$ на (t_1, t_2), $\int\limits_{q(t_1)}^{q(t_2)} a(s)\,ds\geqslant \frac{\pi}{\nu} C_\nu$ на $(t_1, q(t_2))$, где $\nu\in(0,\pi)$, $C_\nu \doteq \frac{\nu}{\sin\nu}\exp(-\nu\operatorname{ctg}\nu)$. Тогда любое решение уравнения

$$x'(t)+a(t)\,x[r(t)]=0 \tag{12}$$

имеет нуль на $[r(t_1), t_2]$.

2. Пусть $r(t)<t$, $r(t)\to\infty$, $a(t)\geqslant 0$ на (t_0, ∞). Тогда, если $\liminf\limits_{t\to\infty}\int\limits_{r(t)}^{t} a(s)\,ds>\frac{1}{e}$, то все решения (12) колеблются.

Этот результат неулучшаем. В самом деле, пусть $a(t)\equiv\psi(t)\times\times\exp\left(-\int\limits_{r(t)}^{t}\psi(s)\,ds\right)$, где $\psi(t)$ — произвольная неотрицательная функция такая, что $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{r(t)}^{t}\psi(s)\,ds=1$. Тогда $a(t)=\psi(t)\,[e^{-1}+o(1)]$, $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{r(t)}^{t}a(s)\,ds=\frac{1}{e}$. Но уравнение (12) в этом случае имеет неколеблющееся решение $x(t)=\exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t}\psi(s)\,ds\right)$.

Пусть

$$a(t)=\frac{\nu\psi(t)}{\sin\left(\nu\int\limits_{r(t)}^{t}\psi(s)\,ds\right)}\exp\left[-\nu\int\limits_{r(t)}^{t}\psi(s)\operatorname{ctg}\left(\nu\int\limits_{r(s)}^{s}\psi(\xi)\,d\xi\right)ds\right].$$

Проверкой можно убедиться, что колеблющаяся функция

$$x(t)=\exp\left[-\nu\int\limits_{t_1}^{t}\psi(s)\operatorname{ctg}\left(\nu\int\limits_{r(s)}^{s}\psi\,d\xi\right)ds\right]\sin\left(\nu\int\limits_{t_1}^{t}\psi(s)\,ds\right)$$

есть решение (12), и все ее полуциклы — правильные. С другой стороны, нетрудно видеть, что $a(t)=C_\nu\psi(t)\,[1+o(1)]$, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{r(t)}^{t}a(s)\,ds=C_\nu$. Поскольку $\lim\limits_{\nu\to 0}C_\nu=\frac{1}{e}$, то величину $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{r(t)}^{t}a(s)\,ds$ можно за счет ν сделать сколь угодно близкой к e^{-1}.

3. Пусть в (12) $r(t)=\lambda t$, $0<\lambda<1$. Если $a(t)\geqslant\left(e\ln\frac{1}{\lambda}\cdot t\right)^{-1}\times\times\left(1+\frac{d}{\ln^2 t}\right)$, $d>\frac{1}{8}\ln^2\frac{1}{\lambda}$, $t\geqslant t_0>0$ (откуда, в частности, следует $\int\limits_{\lambda t}^{t}a(s)\,ds>\frac{1}{e}+\frac{d}{e\ln^2 t}$), то все решения уравнения (12) колеблются.

4. Рассмотрим уравнение

$$x'(t)+a_1(t)\,x[r_1(t)]+a_2(t)\,x[r_2(t)]=0,\quad t\geqslant t_0, \tag{13}$$

с двумя монотонными запаздываниями $r_i(t) \leqslant t$, $q_i[r_i(t)] \equiv t$, $i = 1, 2$; $r_1(t) + r_2(t) < 2t$. Обозначим

$$R(t) = \min\{r_1(t),\ r_2(t)\}, \qquad A(t) = \begin{cases} a_1(t) & \text{для} \quad q_1(t) \geqslant q_2(t), \\ a_2(t) & \text{для} \quad q_1(t) < q_2(t). \end{cases}$$
$$Q(t) = \max\{q_1(t),\ q_2(t)\},$$

Пусть $R(t) \to \infty$, и последовательность интервалов $(t_1^{(k)},\ t_2^{(k)})$, $t_1^{(k)} \to \infty$ такова, что $a_i(t) \geqslant 0$ на $\bigcup\,(t_1^{(k)},\ Q(t_2^{(k)}))$

$$\int\limits_{Q(t_1^{(k)})}^{Q(t_2^{(k)})} A(s)\,ds \geqslant \frac{\pi}{\nu}\,C_\nu, \quad \liminf_{t \in \bigcup(R(t_1^{(k)}),\, t_1^{(k)})} \int\limits_{R(t)}^{t} A(s)\,ds > C_\nu.$$

Тогда на каждом промежутке $[R(t_1^{(k)}),\ t_2^{(k)}]$ имеется хотя бы один нуль любого решения (13). В частности, если $a_i(t) \geqslant 0$, $i = 1, 2$, на (t_0, ∞), $\liminf \int\limits_{R(t)}^{t} A(s)\,ds > e^{-1}$, то все решения (13) колеблются. Даже этот более слабый признак колеблемости всех решений (13) впервые улавливает специфичность уравнения с несколькими запаздываниями. Например, в [10] колеблемость всех решений уравнения (13) гарантируется, если $a_i(t) \geqslant 0$, $i = 1, 2$,

$$\limsup_{t \to \infty} \int\limits_{G(t)}^{t} [a_1(s) + a_2(s)]\,ds > 1, \quad G(t) = \max\{r_1(t),\ r_2(t)\}.$$

Это значит, что основное значение придается не наиболее отличающемуся от t запаздыванию (которое и должно определять колебательный характер решений уравнения), а наименее отличающемуся от него. Таким образом, в [10] случай нескольких запаздываний подгоняется под случай одного запаздывания.

5. Рассмотрим уравнение первого порядка с одним запаздыванием $r(t) < t$ и одним опережением $p(t) \geqslant t$

$$\begin{gathered} x'(t) + a(t)\,x[r(t)] + b(t)\,x[p(t)] = 0, \quad t \geqslant t_0, \\ q[r(t)] \equiv s[p(t)] \equiv t, \quad r(t_2) > t_1, \quad p(t_1) < t_2. \end{gathered} \tag{14}$$

Пусть $\varphi(t) \geqslant 0$, $t < z(t) \leqslant q(t)$ — произвольные непрерывные функции, причем $\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi)\,d\xi = \pi$, $\int\limits_{s(t)}^{q(t)} \varphi(\xi)\,d\xi < \pi$ на $(r(t_1),\ p(t_2))$. Тогда, если

$$a(t) \geqslant \frac{r'(t)\,\varphi[r(t)] \exp\left[-\int\limits_{r(t)}^{t} \varphi(\xi) \operatorname{ctg}\left(\int\limits_{\xi}^{z(\xi)} \varphi(\tau)\,d\tau\right) d\xi\right] \sin \int\limits_{s[r(t)]}^{z[r(t)]} \varphi(\xi)\,d\xi}{\sin \int\limits_{r(t)}^{z[r(t)]} \varphi(\xi)\,d\xi \, \sin \int\limits_{s[r(t)]}^{r(t)} \varphi(\xi)\,d\xi}; \tag{15}$$

$$b(t) \geqslant \frac{p'(t)\ \varphi[p(t)] \exp\left[\int\limits_{t}^{p(t)} \varphi(\xi) \operatorname{ctg}\left(\int\limits_{\xi}^{z(\xi)} \varphi(\tau)\,d\tau\right) d\xi\right] \cdot \sin \int\limits_{z[p(t)]}^{q[p(t)]} \varphi(\xi)\,d\xi}{\sin \int\limits_{s[r(t)]}^{t} \varphi(\xi)\,d\xi \cdot \sin \int\limits_{p(t)}^{z[p(t)]} \varphi(\xi)\,d\xi}, \tag{16}$$

то на промежутке $[r(t_1),\ p(t_2)]$ имеется по крайней мере один нуль любого решения уравнения (14).

Заметим, что «урезанные» уравнения $u'(t) + a(t)\,u[r(t)] = 0$ и, тем более, $v'(t) + b(t)\,v[p(t)] = 0$ даже при выполнении (15), (16) этим свойством могут и не обладать.

6. Рассмотрим уравнение второго порядка с одним запаздыванием

$$x''(t)+a(t)x(t)+b(t)x[r(t)]=0, \quad t\geqslant t_0, \quad r(t)<t. \tag{17}$$

Пусть $\varphi(t)>0$, $z(t)\geqslant 0$ — произвольные функции достаточной гладкости, причем $\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(s)\,ds=\pi$, $\int\limits_{r(t)}^{t}\varphi(s)\,ds<\pi$ на $[t_1, q(t_2)]$. Если

$$a(t)\geqslant\varphi^2+\frac{\varphi''}{\varphi}-\frac{3(\varphi')^2}{4\varphi^2}+z'-z^2-\frac{\varphi' z}{\varphi}-2\varphi z\operatorname{ctg}\left(\int\limits_{t}^{q(t)}\varphi ds\right),$$

$$b(t)\geqslant 2r'(t)z[r(t)]\sqrt{\varphi(t)\varphi[r(t)]}\,\frac{\exp\left(\int\limits_{r(t)}^{t}z(s)\,ds\right)}{\sin\int\limits_{r(t)}^{t}\varphi(s)\,ds},$$

то на промежутке $[r(t_1), t_2]$ имеется по крайней мере один нуль любого решения уравнения (17).

Замечание относительно урезанных уравнений, сделанное ранее, справедливо и в этом случае. Используя в качестве $\varphi(t)$ и $z(t)$ конкретные функции, мы каждый раз получим новый признак колеблемости всех решений (17). Так, положив $\varphi(t)=\nu t^{-1}$, $0<\nu<\nu_0$, $z(t)=0{,}5t^{-1}$, можно показать, что это свойство уравнения (17) имеет место, если $t[r(t)]^{-1}$ ограничено, $a(t)\geqslant 0$, $b(t)\geqslant Cr'(t)\left[r^2(t)\ln\dfrac{t}{r(t)}\right]^{-1}$, $C>1$.

Положив $\varphi(t)=\nu(t\ln t)^{-1}$, $z(t)=0{,}5t^{-1}$, можно показать, что тот же факт справедлив, если

$$\frac{\ln t}{\ln r(t)}\leqslant D<e^2,\ a(t)\geqslant 0,\ b(t)\geqslant\frac{Cr'(t)}{r^2(t)\sqrt{\ln t\cdot\ln r(t)}\ln\left(\dfrac{\ln t}{\ln r(t)}\right)}, \quad C>1.$$

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. *352*
2. *Onose H.* A comparison theorem and the forsed oscillation.— Bull. Austral. Math. Soc., 1975, 13, 1, *13—19*.
3. *Onose H.* A comparison theorem for delay differential equations.— Utilitas Math., 1976, 10, *185—191*.
4. *Чантурия Т. А.* О некоторых асимптотических свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— Докл. АН СССР, 1977, 235, 5, *1049—1052*.
5. *Шевело В. Н.* Об одном методе сравнения для изучения колебательных решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием.— В кн.: Nonlinear vibration problems. Варшава, 1975, *97—105*.
6. *Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А.* Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тбилиси. 1977. *110*.
7. *Домшлак Ю. И.*— Метод сравнения типа Штурма и его применение к локализации нулей решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, I.— Изв. АН. Аз ССР. Сер физ.-техн и мат наук. 1979, 5, *120—127*
8. *Домшлак Ю. И.* Метод сравнения типа Штурма и его применение к локализации нулей решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, II. Рукопись деп. в ВИНИТИ, №2578—79 Деп.
9. *Изюмова Д. В.* К вопросу о колеблемости решений линейного дифференциального уравнения четного порядка со знакопеременным коэффициентом.— В кн.: Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений. Киев, 1978, *70—77*.
10. *Tomaras A.* Oscillatory behavior of an equation arising from an industrial problem.— Bull. Austr. Math. Soc., 1975, 13, 2, *255—260*
11. *Шевело В. Н., Иванов А. Ф.* Об асимптотическом поведении решений одного класса дифференциальных уравнений первого порядка с отклонением аргумента смешанного типа.— В кн.: Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений Киев, 1977, *143—150*.

Институт математики
и механики АН АзССР

Поступила в редакцию
18.03.1980 г.