УДК 519.21

А. В. Иванов

Асимптотическое разложение моментов оценки наименьших квадратов векторного параметра нелинейной регрессии

Рассмотрим последовательность наблюдаемых случайных величин $x_j = g(j, \theta_0) + \varepsilon_j$, $j \geqslant 1$, где $g(j, \theta_0)$ — функции, нелинейно зависящие от неизвестного параметра $\theta_0 \in \Theta$, Θ — открытое множество евклидового пространства R^p; ε_j — независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $(R^N, \mathcal{B}^N)$ — счетное произведение пространств $(R^1, \mathcal{B}^1)$, $\mathcal{B}^1$ — σ-алгебра борелевских множеств вещественной прямой R^1, $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ — семейство вероятностных мер на $(R^N, \mathcal{B}^N)$, отвечающих последовательностям $x_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j$, $j \geqslant 1$, $\theta \in \Theta$. Положим $f(j, \theta) = [x_j - g(j, \theta)]^2$, $L_n(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} f(j, \theta)$, $\overline{\Theta}$ — замыкание Θ. Оценкой наименьших квадратов параметра $\theta_0 \in \Theta$, полученной по наблюдению x_j, $j = 1, \ldots, n$, назовем $\mathcal{B}^N$-измеримое отображение θ_n: $R^N \to \overline{\Theta}$, для которого $L_n(\theta_n) = \inf\{L_n(\theta), \theta \in \overline{\Theta}\}$. Очевидно, θ_n является функцией только x_j, $j = 1, \ldots n$.

В предлагаемой работе получено асимптотическое разложение моментов нормированной оценки θ_n при $n \to \infty$. Найдены первые члены асимптотического разложения вектора смещения и корреляционной матрицы θ_n. Для случая оценок максимальной апостериорной плотности и обобщенных байесовских оценок неизвестного параметра однопараметрического семейства плотностей вероятности асимптотические разложения моментов получены в работе [1].

Пусть $u(\theta)$ — гладкая функция, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ — вектор с целыми неотрицательными координатами, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$. Тогда $u^{(\alpha)}(\theta) = (\partial^{|\alpha|}/\partial^{\alpha_1}\theta_1 \ldots \partial^{\alpha_p}\theta_p)\, u(\theta)$. Будем пользоваться также иным обозначением для производной: $u^{i_1 \ldots i_r}(\theta) = (\partial^r/\partial\theta_{i_1} \ldots \partial\theta_{i_r})\, u(\theta)$, где $(i_1, \ldots, i_r) \in \{1, \ldots, p\}^r$, $r \geqslant 1$. Пусть E_θ — усреднение по мере P_θ. Будем считать, что у функций $g(j, \theta)$, $\theta \in \Theta$, $j \geqslant 1$, существуют и непрерывны все частные производные до порядка $k \geqslant 2$ включительно. Положим, считая $E_\theta \varepsilon_j = 0$,

$$b_n^{(\alpha)}(\theta) = -\frac{1}{2} n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} (f^{(\alpha)}(j, \theta) - E_\theta f^{(\alpha)}(j, \theta)) =$$

$$= n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} g^{(\alpha)}(j, \theta)\, \varepsilon_j \,(\mathrm{mod}\, P_\theta), \quad a_n^{i_1 \ldots i_r}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} E_\theta f^{i_1 \ldots i_r}(j, \theta).$$

Аналогичный смысл придадим обозначению $b_n^{i_1 \ldots i_r}(\theta)$. Положим $E_\theta \varepsilon_j^\varkappa = m^\varkappa$, $\varkappa$ — целое положительное число,

$$I_n(\theta) = \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g^i(j, \theta)\, g^l(j, \theta)\right)_{i,l=1}^{p}, \quad I_n^{-1}(\theta) = \Lambda_n(\theta) = (\Lambda_n^{il}(\theta))_{i,l=1}^{p},$$

$$\varphi_{\alpha n}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} (g^{(\alpha)}(j, \theta))^2, \quad \varphi_{\alpha n}(\theta_1, \theta_2) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} (g^{(\alpha)}(j, \theta_1) - g^{(\alpha)}(j, \theta_2))^2.$$

Обозначим

$$\Pi_n^{(i_1)(i_2 i_3)}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g^{i_1}(j, \theta)\, g^{i_2 i_3}(j, \theta),$$

$$\Pi_n^{(i_1)(i_2)(i_3)}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g^{i_1}(j, \theta)\, g^{i_2}(j, \theta)\, g^{i_3}(j, \theta) \quad \text{и т. д.}$$

Если в произведении двух или большего числа сомножителей какой-либо индекс встречается дважды, то это означает суммирование по всем значениям этого индекса от 1 до p. Например,

$$\Lambda_n^{ii_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} \Pi_n^{(i_1 i_2)(i_3)} \lambda_i = \sum_{i, i_1, i_2, i_3 = 1}^{p} \Lambda_n^{ii_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} \Pi_n^{(i_1 i_2)(i_3)} \lambda_i \quad \text{и т. п.}$$

Введем следующие предположения.

A. Распределение ε_1 не зависит от θ, $E_\theta \varepsilon_1 = 0$, $E_\theta \varepsilon_1^2 = \sigma^2$ и $E_\theta |\varepsilon_1|^{m+\rho} < \infty$ для целого $m \geqslant k+1$ и некоторого $\rho > 0$.

B. Для любого компакта $T \subset \Theta$ и $n > n_T$ существует константа $b_T > 0$ такая, что для любого $r > 0$

$$\inf_{\theta_0 \in T} \inf_{\{\theta \in \bar{\Theta} : |\theta - \theta_0| \geqslant r\}} \varphi_{0n}(\theta, \theta_0) \geqslant b_T r^2.$$

C_α. Для любого компакта $T \subset \Theta$ и $n > n_T$ существует константа $c_T(\alpha) < \infty$ такая, что для любого $r > 0$

$$\sup_{\theta_0 \in T} \sup_{\{\theta \in \bar{\Theta} : |\theta - \theta_0| \leqslant r\}} \varphi_{\alpha n}(\theta, \theta_0) \leqslant c_T(\alpha)\, r^2.$$

D_α. Для любого компакта $T \subset \Theta$, если $g^{(\alpha)}(j, \theta) \not\equiv 0$ на $N \times \Theta$, то $\varliminf_{n \to \infty} \inf_{\theta_0 \in T} \varphi_{\alpha n}(\theta_0) > 0$.

F_α. Для любого компакта $T \subset \Theta$ и m из условия A следует

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sup_{\theta_0 \in T} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} |g^{(\alpha)}(j, \theta_0)|^m < \infty.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* A, B; C_α, $|\alpha| = 0, \ldots, k$; D_α, F_α, $|\alpha| = 1, \ldots, k$. *Тогда для любого кампакта* $T \subset \Theta$ *существует константа* $\varkappa_T > 0$ *такая, что при* $n \to \infty$

$$\sup_{\theta_0 \in T} P_{\theta_0} \left\{ \left| n^{1/2}(\theta_n - \theta_0) - \sum_{\nu=0}^{k-2} h_{\nu n} n^{-\nu/2} \right| \geqslant \varkappa_T n^{-\frac{k-1}{2}} (\log n)^{\frac{k}{2}} \right\} =$$

$$= O\left(n^{-\frac{m-2}{2}} (\log n)^{-\frac{m}{2}}\right). \tag{1}$$

$h_{\nu n} = (h_{\nu n}(j))_{j=1}^{p}$ — векторы, координаты которых — однородные полиномы степени $\nu + 1$ относительно $b_n^{(\alpha)}(\theta_0)$, $|\alpha| = 1, \ldots, \nu + 1$, с равномерно ограниченными по $\theta_0 \in T$ и $n > n_T$ коэффициентами. В частности,

$$h_{0n} = (\Lambda_n^{ii_1} b_n^{i_1})_{i=1}^{p}, \quad h_{1n} = \left(\Lambda_n^{ii_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} \left(b_n^{i_1 i_2} b_n^{i_3} - \frac{1}{4} \Lambda_n^{i_4 i_5} a_n^{i_1 i_2 i_4} b_n^{i_3} b_n^{i_5} \right) \right)_{i=1}^{p},$$

$$h_{2n} = \left(\Lambda_n^{ii_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} \Lambda_n^{i_4 i_5} \left[\frac{1}{2} b_n^{i_1 i_2 i_4} b_n^{i_3} b_n^{i_5} + b_n^{i_1 i_5} b_n^{i_2 i_4} b_n^{i_3} \right] - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \Lambda_n^{ii_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} \Lambda_n^{i_4 i_5} \Lambda_n^{i_6 i_7} b_n^{i_5} b_n^{i_7} \left[\frac{1}{6} a_n^{i_1 i_2 i_4 i_6} b_n^{i_3} + \frac{1}{2} a_n^{i_2 i_4 i_6} b_n^{i_1 i_3} + \right.$$

$$\left. \left. + a_n^{i_1 i_2 i_6} b_n^{i_3 i_4} - \frac{1}{4} \Delta_n^{i_8 i_9} a_n^{i_1 i_2 i_8} a_n^{i_3 i_4 i_6} b_n^{i_9} \right] \right)_{i=1}^{p}.$$

Доказательство этого утверждения содержится в [2] (в [2] правая часть (1) записана более грубо, в виде $o(n^{-\frac{m-2}{2}})$). Приведенная здесь запись первых членов разложения θ_n является покоординатной записью векторных полиномов, найденных в [2].

Очевидно, соотношение (1) означает, что

$$n^{1/2}(\theta_n - \theta_0) = \sum_{\nu=0}^{k-2} h_{\nu n} n^{-\nu/2} + \xi_{k-1,n} n^{-\frac{k-1}{2}},$$

где $\xi_{k-1,n}(\theta_0)$ — вектор, обладающий следующим свойством:

$$\sup_{\theta_0 \in T} P_{\theta_0}\{|\xi_{k-1,n}| \geqslant \varkappa_T (\log n)^{\frac{k}{2}}\} = O(n^{-\frac{m-2}{2}} (\log n)^{-\frac{m}{2}}). \qquad (2)$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* A, D_α и F_α. *Тогда для любого компакта* $T \subset \Theta$

$$\sup_{\theta_0 \in T} P_{\theta_0}\{|b_n^{(\alpha)}(\theta_0)| \geqslant \gamma_n \sigma \varphi_{\alpha n}^{1/2}(\theta_0)\} \leqslant \delta_T n^{-\frac{m-2}{2}} \gamma_n^{-m},$$

где δ_T — одна и та же константа для любой последовательности $\gamma_n \geqslant ((m-2+\delta)\log n)^{1/2}$, $\delta > 0$ — произвольное фиксированное число.

Лемма 2 является одномерным равномерным вариантом утверждения с. 179 книги [3] для суммы случайных величин $b_n^{(\alpha)}(\theta_0)$.

Пусть $v_1 = \{\lambda \in R^p : |\lambda| \leqslant 1\}$. Положим для $\lambda \in v_1$ $(h_{\nu n}, \lambda) = h_{\nu n}(\lambda)$, $(\xi_{k-1,n}, \lambda) = \xi_{k-1,n}(\lambda)$, $(n^{1/2}(\theta_n - \theta_0), \lambda) = \theta_n(\lambda)$. Зафиксируем целочисленный вектор $r = (r_1, \dots, r_p)$, $|r| = s \geqslant 1$. Рассмотрим множество целочисленных векторов с неотрицательными координатами $a_{qs} = \left((i_0, \dots, i_q) : \sum_{\nu=0}^{q} i_\nu = s, \sum_{\nu=0}^{q} \nu i_\nu = q\right)$ и множество матриц размерности $(q+1) \times p$ с целыми неотрицательными элементами

$$A_{qs}(r) = \left\{(d_{\nu j}) : \sum_{j=1}^{p} d_{\nu j} = i_\nu, \quad \nu = 0, \dots, q; \quad \sum_{\nu=0}^{q} d_{\nu j} = r_j, \quad j = 1, \dots p; \right.$$
$$\left. (i_0, \dots, i_q) \in a_{qs}\right\}.$$

Лемма 3. *Пусть $s \geqslant 1$ — целое число и выполнены условия леммы 1. Тогда*

1) $$\theta_n^s(\lambda) = \sum_{q=0}^{k-2} \tilde h_{qs}(\lambda) n^{-q/2} + \tilde h_{k-1,s}(\lambda) n^{-\frac{k-1}{2}},$$

$$\tilde h_{qs}(\lambda) = s! \sum_{a_{qs}} \prod_{\nu=0}^{q} \frac{1}{i_\nu!} h_{\nu n}^{i_\nu}(\lambda), \quad q = 0, \dots, k-2;$$

2) *коэффициенты $\tilde h_{q,r}$, $r = |s|$ полинома $\tilde h_{qs}(\lambda)$ при $\lambda_1^{r_1} \dots \lambda_p^{r_p}$ имеют вид*

$$\tilde h_{q,r} = s! \sum_{A_{qs}(r)} \prod_{\nu=0}^{q} \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{d_{\nu j}!} h_{\nu n}^{d_{\nu j}}(j), \quad q = 0, \dots k-2;$$

3) *коэффициенты $\tilde h_{k-1,r}(\theta_0)$, $|r| = s$ полинома $\tilde h_{k-1,s}(\lambda)$ обладают следующим свойством: найдется число $\gamma > 0$ такое, что для любого ком-*

пакта $T \subset \Theta$ *и некоторой константы* $\tilde{\varkappa}_T > 0$

$$\sup_{\theta_0 \in T} P_{\theta_0} \{\max_{|r|=s} |\tilde{h}_{k-1,r}(\theta_0)| \geqslant \tilde{\varkappa}_T (\log n)^{\gamma}\} = O(n^{-\frac{m-2}{2}} (\log n)^{-\frac{m}{2}}).$$

Доказательство 1) и 2) не вызывает затруднений; 3) просто вытекает из равенства (2) и леммы 2.

Обозначим M_{q+s}, $q = 0, \ldots, k-2$, множество целочисленных векторов μ с координатами $\mu_\alpha \geqslant 0$, $|\alpha| = 1, \ldots, q+1$, для которых $\sum\limits_{|\alpha|=1,\ldots,q+1} \mu_\alpha = q + s$. Утверждения 1) и 2) леммы 3 показывают, что

$$\tilde{h}_{q,r} = \sum_{M_{q+s}} c_{\mu,r}(\theta_0) \sum_{|\alpha|=1}^{q+1} (b_n^{(\alpha)}(\theta_0))^{\mu_\alpha}, \tag{3}$$

где коэффициенты $c_{\mu,r}(\theta_0)$ ограничены равномерно по $\theta_0 \in T$ и $n > n_T$.

Рассмотрим следующие множества матриц с целыми неотрицательными элементами (ср. с [1]):

$$K_{\mu,q}^{(l)} = \left\{(\varkappa_{\alpha j}) : \sum_{j=1}^{l} \varkappa_{\alpha j} = \mu_\alpha;\ |\alpha| = 1, \ldots, q+1\right\}, \quad \mu \in M_{q+s};$$

$$\tilde{K}_q^{(l)} = \left\{(\varkappa_{\alpha j}) : \varkappa_j = \sum_{|\alpha|=1}^{q+1} \varkappa_{\alpha j} \neq 1,\ j = 1, \ldots, l\right\}; \quad K_q^{(l)} = \{(\varkappa_{\alpha j}) : \varkappa_j \geqslant 2,\ j = 1, \ldots, l\};$$

$$K_q^{(l)}(j_1, \ldots, j_\rho) = \{(\varkappa_{\alpha j}) : \varkappa_j \geqslant 2,\ j \in (j_1, \ldots, j_\rho);\ \varkappa_{\alpha j} = 0,\ |\alpha| = 1, \ldots, q+1,$$
$$j \notin (j_1, \ldots, j_\rho)\} \subset \tilde{K}_q^{(l)}.$$

Заметим, что $K_{\mu,q}^{(n)} \cap \tilde{K}_q^{(n)} = \varnothing$, если $q = 0$ и $s = 1$ и

$$K_{\mu,q}^{(n)} \cap \tilde{K}_q^{(n)} = \bigcup_{\rho=1}^{[(q+s)/2]} \bigcup_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\rho \leqslant n} (K_q^{(n)}(j_1, \ldots, j_\rho) \cap K_{\mu,q}^{(n)})$$

— в остальных случаях. Положим для $\rho = 1, \ldots, [(q+s)/2]$

$$G_{\mu,n}(\theta; \rho, q, s) = \sum_{K_{\mu,q}^{(\rho)} \cap K_q^{(\rho)}} n^{-\rho} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\rho \leqslant n} \prod_{|\alpha|=1}^{q+1} \prod_{\gamma=1}^{\rho} \frac{\mu_\alpha!}{\varkappa_{\alpha\gamma}!} (g^{(\alpha)}(j_\gamma, \theta))^{\varkappa_{\alpha\gamma}} m_{\varkappa_\gamma}.$$

Лемма 4. $G_{\mu,n}(\theta; \rho, q, s) = \sum\limits_{l=0}^{\rho-1} \Psi_{\mu,n}^{(l)}(\theta; \rho, q, s) n^{-l}$, где $\Psi_{\mu,n}^{(l)}(\theta; \rho, q, s)$ — *полиномы от моментов* ε_1 *и средних арифметических по всем индексам* $j = 1, \ldots, n$ *произведений различных степеней различных производных функций* $g(j, \theta)$ *типа введенных выше величин* $\Pi_n^{(i_1)(i_2)(i_3)}(\theta)$, $\Pi_n^{(i_1)(i_2 i_3)}(\theta)$ *и т. п.*

Доказательство леммы легко получить, например, индукцией по ρ.

Положим $\overline{\Psi}_{r,n}^{(l)}(\theta; \rho, q, s) = \sum\limits_{M_{q+s}} c_{\mu,r}(\theta) \Psi_{\mu,n}^{(l)}(\theta; \rho, q, s)$. Введем множество индексов $B_l(k, s) = \{(q, t) : 2q + s - 2t = l;\ q = 0, \ldots, k-2;\ t = 1, \ldots, [(q + s)/2]\}$. Очевидно, $B_l(k, s) = \varnothing$, если s и l — числа разной четности или $q + s = 1$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* A, B, C_α, $|\alpha| = 0, \ldots, k$; D_α, F_α, $|\alpha| = 1, \ldots, k$. *Тогда для целых* $s \geqslant 1$

$$E_{\theta_0} \theta_n^s(\lambda) = \sum_{q=0}^{k-2} E_{\theta_0} \tilde{h}_{qs}(\lambda) n^{-q/2} + h_{ns}^*(\lambda), \tag{4}$$

причем 1) *коэффициенты* $h^*_{n,r}(\theta)$, $r=(r_1,\ldots,r_p)$, $|r|=s$, *полинома* $h^*_{ns}(\lambda)$ *обладают следующим свойством: для любого компакта* $T\subset\Theta$

$$\max_{|r|=s}\sup_{\theta_0\in T}|h^*_{n,r}(\theta_0)|=o(n^{-\frac{k-2-\varepsilon}{2}})$$

для $s\leqslant(m-1)\wedge\left(m-k+\left[\varepsilon+\dfrac{2(m-k+\varepsilon)}{m-2}\right]\right)$, $\varepsilon\in[0,k-2]$;

$$2)\ E_{\theta_0}\tilde{h}_{q,r}(\theta_0)=\sum_{\rho=1}^{[(q+s/2]}\sum_{t=1}^{\rho}\overline{\Psi}^{(\rho-t)}_{r,n}(\theta_0;\rho,q,s)\,n^{-\frac{q+s}{2}+t},\quad q=0,\ldots,k-2;$$

$$3)\ \frac{s!\,n^{\frac{s}{2}}}{r_1!\ldots r_p!}E_{\theta_0}\prod_{i=1}^{p}(\theta_{ni}-\theta_{0i})^{r_i}=\sum_{l=0}^{[k-2-\varepsilon]}n^{-l/2}\sum_{B_l(k,s)}\sum_{\rho=t}^{[(q+s)/2]}\overline{\Psi}^{(\rho-t)}_{r,n}(\theta_0;\rho,q,s)+$$

$$+h'_{n,r}(\theta_0),\tag{5}$$

где $h'_{n,r}$ *обладает свойством* $h^*_{n,r}$, *а коэффициенты при* $n^{-l/2}$ *ограничены равномерно по* $\theta_0\in T$ *и* $n>n_T$. *Если* s — *четное число, то суммирование в* (5) *производится лишь по четным* l, *если* s — *нечетное число, — по нечетным* l.

Доказательство. Пусть $\theta_0\in T$, $W_n(\theta_0)=\{\max_{|r|=s}|\tilde{h}_{k-1,r}(\theta_0)|<\tilde{\varkappa}_T(\log n)^{\gamma}\}$, $\chi(A)$ — индикатор A, $\bar{\chi}=1-\chi$. Из леммы 3 вытекает, что

$$E_{\theta_0}\chi(W_n(\theta_0))\,\theta^s_n(\lambda)=\sum_{q=0}^{k-2}E_{\theta_0}\chi(W_n(\theta_0))\,\tilde{h}_{qs}(\lambda)\,n^{-q/2}+h^{(1)}_{ns}(\lambda),$$

$h^{(1)}_{ns}(\lambda)$ — полином, все коэффициенты которого равномерно по $\theta_0\in T$ суть величины $o(n^{-\frac{k-2}{2}})$. Оценим $E_{\theta_0}\bar{\chi}(W_n(\theta_0))\,\tilde{h}_{qs}(\lambda)$, $q=0,\ldots,k-2$. Пусть q — фиксированное. Равенство (3) показывает, что достаточно оценить величины вида

$$E_{\theta_0}\bar{\chi}(W_n(\theta_0))\prod_{|\alpha|=1}^{q+1}(b^{(\alpha)}_n(\theta_0))^{\mu_\alpha},\quad \mu\in M_{q+s}.$$

Поскольку

$$\left|\prod_{|\alpha|=1}^{q+1}(b^{(\alpha)}_n(\theta_0))^{\mu_\alpha}\right|\leqslant c(q,s)\left(\sum_{|\alpha|=1}^{q+1}(b^{(\alpha)}_n(\theta_0))^2\right)^{\frac{q+s}{2}},$$

где $c(q,s)$ — константа, не зависящая от θ_0 и s, то следует оценить $E_{\theta_0}\bar{\chi}(W_n(\theta_0))\,|b^{(\alpha)}_n(\theta_0)|^{q+s}$ при фиксированном α, $1\leqslant|\alpha|\leqslant q+1$.

Для некоторых $\nu>1$ и $\delta>0$ положим $\gamma_{nj}=\nu^j((m-2+\delta)\log n)^{1/2}$, $j\geqslant1$; $U^{(0)}_n(\theta_0)=\{|b^{(\alpha)}_n(\theta_0)|<\gamma_{n0}\sigma\varphi_{\alpha n}(\theta_0)\}$; $U^{(j)}_n(\theta_0)=\{\gamma_{n,j-1}\leqslant|b^{(\alpha)}_n(\theta_0)|\times\sigma^{-1}\varphi^{-1}_{\alpha n}(\theta_0)<\gamma_{nj}\}$, $j\geqslant1$. Очевидно,

$$E_{\theta_0}\bar{\chi}(W_n(\theta_0))\,|b^{(\alpha)}_n(\theta_0)|^{q+s}\leqslant E_{\theta_0}\bar{\chi}(W_n(\theta_0))\,\chi(U^{(0)}_n(\theta_0))\,|b^{(\alpha)}_n(\theta_0)|^{q+s}+$$

$$+\sum_{j\geqslant1}E_{\theta_0}\chi(U^{(j)}_n(\theta_0))\,|b^{(\alpha)}_n(\theta_0)|^{q+s}.$$

Из условий теоремы и лемм 2, 3 вытекает, что

$$\sup_{\theta_0\in T}E_{\theta_0}\bar{\chi}(W_n(\theta_0))\,\chi(U^{(0)}_n(\theta_0))\,|b^{(\alpha)}_n(\theta_0)|^{q+s}=O(n^{-\frac{m-2}{2}}(\log n)^{\frac{q+s-m}{2}}),$$

$$\sup_{\theta_0\in T}\sum_{j\geq 1}E_{\theta_0}\chi(U_n^{(j)}(\theta_0))\,|\,b_n^{(\alpha)}(\theta_0)\,|^{q+s}\leq e_T n^{-\frac{m-2}{2}}(\log n)^{\frac{q+s-m}{2}}\sum_{j\geq 1}\nu^{-j(m-q-s)},$$

e_T — константа, зависящая от T. Последний ряд сходится, если $m > q+s$.

Рассмотрим $E_{\theta_0}\bar\chi(W_n(\theta_0))\,|\,\theta_n(\lambda)\,|^s$, s — не обязательно целое число. Очевидно, достаточно оценить $n^{s/2}E_{\theta_0}\bar\chi(W_n(\theta_0))\,|\,\theta_n-\theta_0\,|^s$. Положим для некоторых $\beta\in(0,\,1/2)$, $\nu>1$

$$V_n^{(0)}(\theta_0)=\{|\,\theta_n-\theta_0\,|<n^{-\beta}(\log n)^{1/2}\},$$

$$V_n^{(j)}(\theta_0)=\{\nu^{j-1}n^{-\beta}(\log n)^{1/2}\leq|\,\theta_n-\theta_0\,|<\nu^j n^{-\beta}(\log n)^{1/2}\},\quad j\geq 1.$$

Тогда равномерно по $\theta_0\in T$

$$\begin{aligned}n^{s/2}E_{\theta_0}\bar\chi(W_n(\theta_0))\,|\,\theta_n-\theta_0\,|^s &\leq n^{s/2}E_{\theta_0}\bar\chi(W_n(\theta_0))\,\chi(V_n^{(0)}(\theta_0))\,|\,\theta_n-\theta_0\,|^s+\\ &+\sum_{j\geq 1}n^{s/2}E_{\theta_0}\chi(V_n^{(j)}(\theta_0))\,|\,\theta_n-\theta_0\,|^s\leq O\left(n^{-\frac{m-2-s(1-2\beta)}{2}}(\log n)^{-\frac{m-s}{2}}\right)+\\ &+e_T' n^{-\frac{(m-s)(1-2\beta)}{2}}(\log n)^{-\frac{m-s}{2}}\sum_{j\geq 1}\nu^{-j(m-s)}.\end{aligned}\tag{6}$$

Для получения в правой части (6) величины $o\left(n^{-\frac{k-2-\varepsilon}{2}}\right)$ достаточно взять целые s и число $\beta\in(0,\,1/2)$ такие, что а) $1\leq s\leq[s^*]\wedge(m-1)$; в) $m-s^*(1-2\beta)=k-\varepsilon$; с) $(m-s^*)(1-2\beta)=k-2-\varepsilon$. Соотношениям в) и с) удовлетворяют $\beta=1/m$ и $s^*=m-k+\varepsilon+2(m-k+\varepsilon)(m-2)^{-1}$. Если $\varepsilon=0$, то а) — с) удовлетворяют $s\leq m-k+1$ для $k\geq 2$, $m\geq 3\vee(2k-2)$; $s\leq m-k$ для $k\geq 4$, $k+1\leq m<2k-2$.

Пусть $\mu\in M_{q+s}$ — фиксированное. Последовательно получаем

$$\begin{aligned}E_{\theta_0}\prod_{|\alpha|=1}^{q+1}(b_n^{(\alpha)}(\theta_0))^{\mu_\alpha} &= n^{-(q+s)/2}\sum_{K_{\mu,q}^{(n)}\cap\tilde K_q^{(n)}}E_{\theta^0}\prod_{|\alpha|=1}^{q+1}\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_\alpha!}{\varkappa_{\alpha j}!}(g^{(\alpha)}(j,\,\theta_0))^{\varkappa_{\alpha j}}\varepsilon_j^{\varkappa j}=\\ &= n^{-(q+s)/2}\sum_{\rho=1}^{[(q+s)/2]}\ \sum_{1\leq j_1<\ldots j_\rho\leq n}\ \sum_{K_{\mu,q}^{(n)}\cap K_q^{(n)(j_1,\ldots j_\rho)}}E_{\theta_0}\prod_{|\alpha|=1}^{q+1}\prod_{\gamma=1}^{n}\frac{\mu_\alpha!}{\varkappa_{\alpha j_\gamma}!}\times\\ &\times(g^{(\alpha)}(j,\,\theta_0))^{\varkappa_{\alpha j_\gamma}}\varepsilon_{j_\gamma}^{\varkappa j_\gamma}=n^{-(q+s)/2}\sum_{\rho=1}^{[(q+s)/2]}n^\rho G_{\mu,n}(\theta;\,\rho,\,q,\,s).\end{aligned}$$

Учитывая полученное равенство и привлекая результат леммы 4, получим утверждение 2) теоремы.

Для получения 3) достаточно применить 2) к сумме $\sum_{q=0}^{k-2}E_{\theta_0}\tilde h_{q,r}(\theta_0)n^{-q/2}$.

Равномерная ограниченность коэффициентов при $n^{-l/2}$ в 3) вытекает из условий F_α, $|\alpha|=1,\ldots,k$, и, например, результата леммы 4.

В приложениях особенно интересны случаи $s=1,\,2$. При $s=1$ теорема дает асимптотическое разложение для вектора смещения θ_n, при $s=2$ — асимптотическое разложение для корреляционной матрицы θ_n. Положим $(E_\theta\,\theta_n(\lambda))^2=(S_n(\theta_0),\,\lambda,\,\lambda)$, $Q_n(\theta_0)=n\,(E_{\theta_0}(\theta_{ni}-\theta_{0i})(\theta_{nj}-\theta_{0j}))_{i,j=1}^p$; $K_n(\theta_0)=n\,(E_{\theta_0}(\theta_{ni}-E_{\theta_0}\theta_{ni})(\theta_{nj}-E_{\theta_0}\theta_{nj}))_{i,j=1}^p$. Найдем первые члены асимптотического разложения вектора смещения θ_n и матрицы $Q_n(\theta_0)$. Первые члены асимптотического разложения матрицы $K_n(\theta_0)$ можно получить, воспользовавшись равенством $K_n(\theta_0)=Q_n(\theta_0)-S_n(\theta_0)$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены условия теоремы при* $k \geqslant 4$. *Тогда*

$$E_{\theta_0}\theta_n(\lambda) = -\frac{\sigma^2}{2}\Lambda_n^{ii_1}(\theta_0)\Lambda_n^{i_2i_3}(\theta_0)\Pi_n^{(i_1)(i_2i_3)}(\theta_0)\lambda_i n^{-1/2} + l_n(\lambda),$$

причем для любого компакта $T \subset \Theta$ *равномерно по* $\theta_0 \in T$ *коэффициенты линейной формы* $l_n(\lambda)$ — *величины* $o(n^{-1})$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть выполнены условия теоремы при* $k \geqslant 4$ *и* $m \geqslant k+2$. *Тогда* $Q_n(\theta_0) = \sigma^2\Lambda_n(\theta_0) + \Lambda_n^{(1)}(\theta_0)n^{-1} + \Lambda_n^{(2)}(\theta_0)$, *причем для любого компакта* $T \subset \Theta$ *равномерно по* $\theta_0 \in T$ *элементы матрицы* $\Lambda_n^{(2)}(\theta_0)$ — *величины* $o(n^{-1})$;

$$(\Lambda_n^{(1)}\lambda, \lambda) = \{\Lambda_n^{ii_1}\Lambda_n^{jj_1}\Lambda_n^{i_2j_2}(2m_3\Pi_n^{(i_1i_2)(j_1)(j_2)} + \sigma^4(\Pi_n^{(i_1i_2)(j_1j_2)} - \Pi_n^{(i_1j_1)(i_2j_2)} -$$

$$- \Pi_n^{(i_1i_2j_2)(j_1)})) + \Lambda_n^{ii_1}\Lambda_n^{jj_1}\Lambda_n^{i_2i_3}\Lambda_n^{j_2j_3}[-m_3\Pi_n^{(j_1)(j_2)(i_3)}(\Pi_n^{(i_1)(i_2j_3)} + \Pi_n^{(i_2)(i_1j_3)} +$$

$$+ \Pi_n^{(j_3)(i_1i_2)}) + \sigma^4(\Pi_n^{(i_3)(j_2j_3)}(\Pi_n^{(i_1)(i_2j_1)} + \Pi_n^{(i_2)(i_1j_1)}) +$$

$$+ \frac{1}{4}\Pi_n^{(i_1)(i_2i_3)}\Pi_n^{(j_1)(j_2j_3)} + \frac{1}{2}\Pi_n^{(i_1)(i_2j_3)}\Pi_n^{(j_1)(j_2i_3)} + \Pi_n^{(j_2)(j_1i_3)}\left(\frac{1}{2}\Pi_n^{(i_2)(i_1j_3)} + 3\Pi_n^{(i_1)(i_2j_3)}\right) -$$

$$- \Pi_n^{(i_3)(j_1j_3)}\left(\Pi_n^{(i_1)(i_2j_3)} + \frac{1}{2}\Pi_n^{(j_3)(i_1i_2)} + \Pi_n^{(i_2)(i_1j_3)}\right))]\}\lambda_i\lambda_j.$$

Доказательство следствий 1 и 2 заключается в простых, но громоздких подсчетах, использующих результаты теоремы и леммы 1.

1. *Гусев С. И.* Асимптотические разложения, связанные с некоторыми статистическими оценками в гладком случае.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, 20, 3, *488—514*; 1976, 21, 1, *16—33*.
2. *Иванов А. В., Цванциг З.* Асипмтотическое разложение оценки наименьших квадратов векторного параметра нелинейной регрессии.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1982, 26, *59—68*.
3. *Bhattacharya R. N., Ranga Rao R.* Normal Approximation and Asymptotic Expansions. N.Y.: Wiley, 1976, *274*.

Институт кибернетики
АН УССР

Поступила в редакцию
22.10.1980 г.