УДК 519.21

В. С. Коновалюк

Суперпозиция двух зависимых процессов марковского восстановления

Данная статья обобщает результат из [1], где найдено стационарное распределение суперпозиции двух зависимых процессов восстановления. Используется тот же метод доказательства теоремы.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, на котором заданы процессы марковского восстановления (ПМВ) $\zeta_n^{(i)} = \{\xi_n^{(i)}, \theta_n^{(i)}, n > 0\}$ полумарковскими матрицами $Q^{(i)}(x) = \{Q_{kr}^{(i)}(x)\}$, где $Q_{kr}^{(i)}(x) = P\{\xi_{n+1}^{(i)} = r, \theta_n^{(i)} \leqslant x/\xi_n^{(i)} = k\} = P_{kr}^{(i)} F_k^{(i)}(x)$; $\xi_n^{(i)} \in E_i$ — полумарковские состояния процесса $\zeta_n^{(i)}$; $\theta_n^{(i)}$ — времена пребывания процесса в состояниях; $P_{kr}^{(i)} = P\{\xi_{n+1}^{(i)} = r/\xi_n^{(i)} = k\}$, $F_k^{(i)}(x) = P\{\theta_n^{(i)} \leqslant x/\xi_n^{(i)} = k\}$, $i = 1, 2$.

Предполагаем, что $F_k^{(i)}(x)$ — абсолютно непрерывны с плотностями $f_k^{(i)}(x)$ и $\bar{F}_k^{(i)}(x) = 1 - F_k^{(i)}(x) > 0$, $x \in [0, \infty)$, $\theta_n^{(i)}$ имеют ограниченные средние, матрицы $P_i = \{P_{kr}^{(i)}, k, r \in E_i\}$ неприводимы.

Задача состоит в изучении ПМВ $\zeta_n = \{\xi_n, \theta_n, n > 0\}$, описывающего суперпозицию зависимых ПМВ $\zeta_n^{(1)}$ и $\zeta_n^{(2)}$.

Под суперпозицией двух зависимых ПМВ $\zeta_n^{(i)}$ понимается процесс ζ_n, в котором переход из состояния в состояние происходит в моменты изменения состояний процессов $\zeta_n^{(i)}$, $i = 1, 2$. Зависимость проявляется в следующем: в момент перехода из состояния из E_i в состояние $k \in E_i$ с вероятностью $p_k^{(i)}$ происходит изменение состояния процесса $\zeta_n^{(j)}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, в соответствии с переходными вероятностями вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $P_{sr}^{(j)}$.

Фазовое пространство состояний процесса ζ_n определяем в виде $E = \{(ikr)\} \times R_+ \cup \{(kr)\}$, где $i = 1, 2$; $k \in E_1$, $r \in E_2$, $R_+ = (0, \infty)$. Возможные состояния процесса ζ_n интерпретируются следующим образом: в начальный момент пребывания в состоянии $(1krx)$ происходит переход процесса $\zeta_n^{(1)}$ в состояние $k \in E_1$, процесс $\zeta_n^{(2)}$ находится в состоянии $r \in E_2$ время x; $(2krx)$ — переход процесса $\zeta_n^{(2)}$ в состояние $r \in E_2$, $\zeta_n^{(1)}$ находится в состоянии $k \in E_1$ время x; (kr) — одновременный переход процесса $\zeta_n^{(1)}$ в состояние $k \in E_1$ и $\zeta_n^{(2)}$ в состояние $r \in E_2$.

Времена пребывания процесса в состояниях: $\theta_{kr} = \theta_k^{(1)} \wedge \theta_r^{(2)}$, $\theta_{1krx} = \theta_k^{(1)} \wedge \theta_r^{(2)x}$, $\theta_{2krx} = \theta_k^{(1)x} \wedge \theta_r^{(2)}$. Здесь $P\{\theta_k^{(i)x} \geqslant t\} = \bar{F}_k^{(i)}(t+x)/\bar{F}_k^{(i)}(x)$. Следовательно, функции распределения времен пребывания в состояниях определяются формулами

$$\psi_{kr}(t) = 1 - \bar{F}_k^{(1)}(t)\,\bar{F}_r^{(2)}(t),\quad \psi_{1krx}(t) = 1 - \bar{F}_k^{(1)}(t)\,\bar{F}_r^{(2)}(t+x)/\bar{F}_r^{(2)}(x),$$

$$\psi_{2krx}(t) = 1 - \bar{F}_r^{(2)}(t)\,\bar{F}_k^{(1)}(t+x)/\bar{F}_k^{(1)}(x),$$

а средние времена пребывания в состояниях —

$$m_{kr} = \int_0^\infty \bar{F}_k^{(1)}(t)\,\bar{F}_r^{(2)}(t)\,dt,\quad m_{1krx} = \frac{1}{\bar{F}_r^{(2)}(x)} \int_0^\infty \bar{F}_k^{(1)}(t)\,\bar{F}_r^{(2)}(t+x)\,dt,$$

$$m_{2krx} = \frac{1}{\overline{F}_k^{(1)}(x)} \int\limits_0 \overline{F}_r^{(2)}(t)\, \overline{F}_k^{(1)}(t + x)\, dt.$$

Определим плотности переходных вероятностей ВЦМ $\{\xi_n,\ n > 0\}$

Из состояния $1kmy$ процесс ζ_n переходит в состояние $2krdx$ при выполнении следующих условий: за время $\theta_m^{(2)} - y$ не произошло восстановление процесса $\zeta_n^{(1)}$, в момент восстановления процесса $\zeta_n^{(2)}$ восстановление процесса $\zeta_n^{(1)}$ не произошло, процесс $\zeta_n^{(2)}$ переходит в состояние r, с момента последнего восстановления процесса $\zeta_n^{(1)}$ прошло время x.

$$P_{1kmy}^{2krdx} = P\{\xi_{n+1} \in 2krdx/\xi_n = 1kmy\} = q_r^{(2)} P\{\xi_{n'+1} = r,\ \theta_m^{(2)y} = x,$$
$$\theta_k^{(1)} > x/\xi_{n'}^{(2)} = m\}\, dx = q_r^{(2)} P_{mr}^{(2)} f_m^{(2)}(x + y)\, \overline{F}_k^{(1)}(x)/\overline{F}_m^{(2)}(y)\, dx.$$

Аналогично,

$$P_{1mry}^{1krdx} = q_k^{(1)} P_{mk}^{(1)} f_m^{(1)}(x - y)\, \overline{F}_r^{(2)}(x)/\overline{F}_r^{(2)}(y)\, dx,\ P_{2mry}^{1krdx} = q_k^{(1)} P_{mk}^{(1)} f_m^{(1)}(x +$$
$$+ y)\, \overline{F}_r^{(2)}(x)/\overline{F}_m^{(1)}(y)\, dx,\ P_{mr}^{1krdx} = q_k^{(1)} P_{mk}^{(1)} f_m^{(1)}(x)\, \overline{F}_r^{(2)}(x)\, dx,$$
$$P_{2kmy}^{2krdx} = q_r^{(2)} P_{mr}^{(2)} f_m^{(2)}(x - y)\, \overline{F}_k^{(1)}(x)/\overline{F}_k^{(1)}(y)\, dx,\ P_{km}^{2krdx} = q_r^{(2)} P_{mr}^{(2)} f_m^{(2)}(x)\, \overline{F}_k^{(1)}(x)\, dx,$$
$$P_{1msy}^{kr} = P_{mk}^{(1)} P_{sr}^{(2)} \left[p_k^{(1)} \int\limits_y^\infty f_m^{(1)}(x-y) \overline{F}_s^{(2)}(x)/\overline{F}_s^{(2)}(y) dx + p_r^{(2)} \int\limits_0^\infty f_s^{(2)}(x+y) \overline{F}_m^{(1)}(x)/\overline{F}_s^{(2)}(y) dx \right],$$
$$P_{2msy}^{kr} = P_{mk}^{(1)} P_{sr}^{(2)} \left[p_k^{(1)} \int\limits_0^\infty f_m^{(1)}(x + y)\, \overline{F}_s^{(2)}(x)/\overline{F}_m^{(1)}(y)\, dx + \right.$$
$$\left. + p_r^{(2)} \int\limits_y^\infty f_s^{(2)}(x - y)\, \overline{F}_m^{(1)}(x)/\overline{F}_m^{(1)}(y)\, dx \right],\ P_{ms}^{kr} = P_{mk}^{(1)} P_{sr}^{(2)} \left[p_k^{(1)} \int\limits_0^\infty f_m^{(1)}(x) \overline{F}_s^{(2)}(x)\, dx + \right.$$
$$\left. + p_r^{(2)} \int\limits_0^\infty f_s^{(2)}(x)\, \overline{F}_m^{(1)}(x)\, dx \right],$$

где $q_k^{(1)} = 1 - p_k^{(1)}$, $q_r^{(2)} = 1 - p_r^{(2)}$.

Введем такие обозначения:

$$U_1(x) = \sum_{n=1}^\infty [q_1 \tilde{P}_1 F_1(x)]^{n^*},\ U_1^0(x) = I\delta(x) + U_1(x),$$

$$U_2(x) = \sum_{n=1}^\infty [F_2(x) P_2 q_2]^{n^*},\ U_2^0(x) = I\delta(x) + U_2(x);$$

I — единичная матрица; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; $F_i(x)$ — диагональные матрицы-функции с элементами $f_k^{(i)}(x)$, $k \in E_i$, $i = 1, 2$; q_i — диагональные матрицы с элементами $q_k^{(i)}$, $k \in E_i$, $i = 1, 2$; $\tilde{P}_1$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице P_1;

$$b_{mlkr}^{(1)}(x) = \overline{F}_r^{(2)}(x) \int\limits_0^\infty u_{1km}(x+y)\, u_{2lr}^0(y)\, dy,\ b_{mlkr}^{(2)}(x) = \overline{F}_k^{(1)}(x) \int\limits_0^\infty u_{1km}^0(y) u_{2lr}(x+y) dy,$$

$$b_{mlkr}(x) = b_{mlkr}^{(1)}(x) + b_{mlkr}^{(2)}(x),$$

где $u_{ist}(x)$ — элементы соответствующих матриц $U_i(x)$; V — матрица с элементами

$$v_{tlkr} = \sum_{m \in E_1} \sum_{s \in E_2} \left[\int\limits_0^\infty (b_{tlms}^{(1)}(y)\, P_{1msy}^{kr} + b_{tlms}^{(2)}(y)\, P_{2msy}^{kr})\, dy + P_{tl}^{kr} \right];$$

$L_2(-\infty, \infty)$ — класс функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу.

Теорема. *Пусть* 1) $F_k^{(i)}(x)$ *абсолютно непрерывны с плотностями* $f_k^{(i)}(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ *и* $\bar{F}_k^{(i)}(x) > 0$, $x \in [0, \infty)$; 2) *функции* $x f_k^{(i)}(x)$ *абсолютно интегрируемы;* 3) $0 < \mathbf{M}\theta_k^{(i)} < \infty$, $k \in E_i$, $i = 1, 2$; 4) $0 \leqslant q_k^{(1)} < 1$, $0 \leqslant q_r^{(2)} < 1$, $k \in E_1$, $r \in E_2$ 5) *матрицы* $P_i = \{P_{kr}^{(i)}, k, r \in E_i\}$ *неприводимы. Тогда для цепи Маркова* $\{\xi_n, n > 0\}$, *вложенной в ПМВ* ζ_n, *существует единственное стационарное распределение вероятностей с плотностями*

$$\tilde{\rho}_{1krx} = \sum_{m \in E_1} \sum_{l \in E_2} \rho_{ml} b_{mlkr}^{(1)}(x), \quad \tilde{\rho}_{2krx} = \sum_{m \in E_1} \sum_{l \in E_2} \rho_{ml} b_{mlkr}^{(2)}(x),$$

где стационарная вероятность попадания в состояние

$$\rho_{ml} = \left\{ \sum_{k \in E_1} \sum_{r \in E_2} \left[\rho_{kr}^0 + \int_0^\infty \sum_{s \in E_1} \sum_{t \in E_2} \rho_{st}^0 b_{stkr}(x)\, dx \right] \right\}^{-1} \rho_{ml}^0,$$

ρ_{ml}^0 — *элементы вектора* ρ^0, *являющегося решением уравнения* $\rho = \rho V$.

Доказательство. Стационарные плотности $\tilde{\rho}_{1krx}$ и $\tilde{\rho}_{2krx}$ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\tilde{\rho}_{1krx} = q_k^{(1)} \sum_{m \in E_1} P_{mk}^{(1)} \left[\int_0^x \tilde{\rho}_{1mry} f_m^{(1)}(x-y) \frac{\bar{F}_r^{(2)}(x)}{\bar{F}_r^{(2)}(y)} dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \tilde{\rho}_{2mry} f_m^{(1)}(x+y) \frac{\bar{F}_r^{(2)}(x)}{\bar{F}_m^{(1)}(y)} dy + \rho_{mr} f_m^{(1)}(x) \bar{F}_r^{(2)}(x), \right]$$

$$\tilde{\rho}_{2krx} = q_r^{(2)} \sum_{m \in E_2} P_{mr}^{(2)} \left[\int_0^\infty \tilde{\rho}_{1kmy} f_m^{(2)}(x+y) \frac{\bar{F}_k^{(1)}(x)}{\bar{F}_m^{(2)}(y)} dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^x \tilde{\rho}_{2kmy} f_m^{(2)}(x-y) \frac{\bar{F}_k^{(1)}(x)}{\bar{F}_k^{(1)}(y)} dy + \rho_{mk} f_m^{(2)}(x) \bar{F}_k^{(1)}(x) \right], \tag{1}$$

$$\rho_{kr} = \sum_{m \in E_1} \sum_{s \in E_2} \left[\int_0^\infty \tilde{\rho}_{1msy} P_{1msy}^{kr} dy + \int_0^\infty \tilde{\rho}_{2msy} P_{2msy}^{kr} dy + \rho_{ms} P_{ms}^{kr} \right].$$

Здесь

$$\sum_{k \in E_1} \sum_{r \in E_2} \left[\int_0^\infty (\tilde{\rho}_{1krx} + \tilde{\rho}_{2krx})\, dx + \rho_{kr} \right] = 1. \tag{2}$$

Введем функции

$$\rho_{1krx} = \tilde{\rho}_{1krx} / \bar{F}_r^{(2)}(x), \quad \rho_{2krx} = \tilde{\rho}_{2krx} / \bar{F}_k^{(1)}(x). \tag{3}$$

Записав первые два уравнения системы (1) в матричной форме

$$R_1(x) = q_1 P_1 \left[\int_0^x F_1(x-y) R_1(y)\, dy + \int_0^\infty F_1(x+y) R_2(y)\, dy + F_1(x) R \right], \tag{4}$$

$$R_2(x) = \left[\int_0^\infty R_1(y) F_2(x+y)\, dy + \int_0^x R_2(y) F_2(x-y)\, dy + R F_2(x) \right] P_2 q_2,$$

где $R_i(x)$, $i = 1, 2$, — матрицы с элементами ρ_{ikrx}, R — матрица с элементами ρ_{kr}, преобразуем их. С этой целью доопределим функции, входящие в (4), на всю ось

$$R_1^+(x)=\begin{cases}R_1(x), & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad R_2^-(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ R_2(-x), & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$F_1^+(x)=\begin{cases}F_1(x), & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad F_2^-(x)=\begin{cases}0 & x>0,\\ F_2(-x), & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Имеем

$$R_1^+(x)-q_1\widetilde{P}_1\int_{-\infty}^{\infty}F_1^+(x-y)\,[R_1^+(y)+R_2^-(y)]\,dy=q_1\widetilde{P}_1F_1^+(x)\,R,\ x>0,$$

$$R_2^-(x)-\int_{-\infty}^{\infty}[R_1^+(y)+R_2^-(y)]\,F_2^-(x-y)\,dyP_2q_2=RF_2^-(x)\,P_2q_2,\ x\leqslant 0. \quad (5)$$

Приведем уравнения (5) к виду парных уравнений на всей оси (см. [2], § 5.3)

$$R^0(x)-q_1\widetilde{P}_1\int_{-\infty}^{\infty}F_1^+(x-y)\,R^0(y)\,dy=q_1\widetilde{P}_1F_1^+(x)\,R+H^-(x),$$

$$R^0(x)-\int_{-\infty}^{\infty}R_0(y)\,F_2^-(x-y)\,dyP_2q_2=RF_2^-(x)\,P_2q_2+H^+(x).$$

Здесь

$$H^-(x)=\begin{cases}R_2^-(x)-q_1\widetilde{P}_1\int_{-\infty}^{\infty}F_1^+(x-y)\,R^0(y)\,dy, & x<0,\\ 0, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

$$H^+(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ R_1^+(x)-\int_{-\infty}^{\infty}R^0(y)\,F_2^-(x-y)\,dyP_2q_2, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

$$R^0(x)=R_1^+(x)+R_2^-(x).$$

При выполнении условий 1 и 2 теоремы элементы матриц-функций $F_1^+(x)$ и $F_2^-(x)$ принадлежат классу функций, интегралы Фурье которых принадлежат классу $L_2(-\infty,\infty)$ и удовлетворяют условию Гельдера (см. [2]).

Перейдем к интегралам Фурье

$$[I-q_1\widetilde{P}_1\mathcal{F}_1^+(s)]\,\mathcal{R}(s)=q_1\widetilde{P}_1\mathcal{F}_1^+(s)\,R+\mathcal{H}^-(s),$$

$$\mathcal{R}(s)\,[I-\mathcal{F}_2^-(s)\,P_2q_2]=R\mathcal{F}_2^-(s)\,P_2q_2+\mathcal{H}^+(s), \quad (6)$$

где

$$\mathcal{R}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{isx}R^0(x)\,dx,\ \mathcal{F}_i^{\pm}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{isx}F_i^{\pm}(x)\,dx,\ \mathcal{H}^{\pm}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{isx}H^{\pm}(x)\,dx.$$

Так как $\|q_1\widetilde{P}_1\mathcal{F}_1^+(s)\|<1$ и $\|\mathcal{F}_2^-(s)\,P_2q_2\|<1$, то операторы $(I-q_1\widetilde{P}_1\mathcal{F}_1^+(s))^{-1}$ и $(I-\mathcal{F}_2^-(s)\,P_2q_2)^{-1}$ существуют и ограничены. Здесь $\|\mathcal{K}(s)\|=$ $=\sup\limits_i\sum\limits_i|\mathcal{K}_{ij}(s)|$. Исключаем из (6) неизвестную функцию

$$\mathcal{R}(s)=[I-q_1\widetilde{P}_1\mathcal{F}_1^+(s)]^{-1}\,[q_1\widetilde{P}_1\mathcal{F}_1^+(s)\,R+\mathcal{H}^-(s)]=$$

$$[R\mathcal{F}_2^-(s)\,P_2q_2+\mathcal{H}^+(s)]\,[I-\mathcal{F}_2^-(s)\,P_2q_2]^{-1}. \quad (7)$$

Тогда $[I - q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s)]\mathscr{H}^+(s) - q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s)R = \mathscr{H}^-(s)[I - \mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2] - R\mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2$. В левой и правой частях этого равенства стоят матрицы-функции, аналитически продолжимые соответственно на верхнюю и нижнюю полуплоскости. Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля, имеем

$$\mathscr{H}^+(s) = [I - q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s)]^{-1} q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s)R,$$
$$\mathscr{H}^-(s) = R\mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2[I - \mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2]^{-1}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) определяем

$$\mathscr{R}(s) = (I - q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s))^{-1}[q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s)R + R\mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2(I - \mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2)^{-1}] =$$
$$= [R\mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2 + (I - q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s))^{-1}q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s)R](I - \mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2)^{-1}.$$

Тогда

$$\mathscr{R}^+(s) = \mathbf{P}_+[\mathscr{R}(s)] = \mathbf{P}_+[(I - q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s))^{-1}q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s)R(I - \mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2)^{-1}], \tag{9}$$

$$\mathscr{R}^-(s) = \mathbf{P}_-[\mathscr{R}(s)] = \mathbf{P}_-[(I - q_1\widetilde{P}_1\mathscr{F}_1^+(s))^{-1}R\mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2(I - \mathscr{F}_2^-(s)P_2q_2)^{-1}],$$

где

$$\mathbf{P}_+[\mathscr{R}(s)] = \int_0^\infty e^{isx}R^0(x)\,dx = \int_0^\infty e^{isx}R_1^+(x)\,dx = \int_0^\infty e^{isx}R_1(x)\,dx,$$

$$\mathbf{P}_-[\mathscr{R}(s)] = \int_{-\infty}^0 e^{isx}R^0(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{rsx}R_2^-(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{isx}R_2(-x)\,dx =$$
$$= \int_0^\infty e^{isx}R_2(x)\,dx.$$

Из системы (9) путем обратного преобразования Фурье находим искомое решение

$$R_1^+(x) = R_1(x) = \int_{-\infty}^\infty U_1^+(x-y)RU_2^{0-}(y)\,dy = \int_0^\infty U_1(x+y)RU_2^0(y)\,dy,$$

$$R_2^-(-x) = R_2(x) = \int_{-\infty}^\infty U_1^{0+}(y)RU_2^-(-x-y)\,dy =$$
$$= \int_0^\infty U_1^0(y)RU_2(x+y)\,dy.$$

Отсюда

$$\rho_{1krx} = \sum_{m\in E_1}\sum_{l\in E_2}\int_0^\infty u_{1km}(x+y)\rho_{ml}u_{2lr}^0(y)\,dy,$$

$$\rho_{2krx} = \sum_{m\in E_1}\sum_{l\in E_2}\int_0^\infty u_{1km}^0(y)\rho_{ml}u_{2lr}(x+y)\,dy.$$

Учитывая (3), находим стационарные плотности

$$\tilde{\rho}_{1krx} = \sum_{m\in E_1}\sum_{l\in E_2}\rho_{ml}b_{mlkr}^{(1)}(x),\quad \tilde{\rho}_{2krx} = \sum_{m\in E_1}\sum_{l\in E_2}\rho_{ml}b_{mlkr}^{(2)}(x). \tag{10}$$

Принимая во внимание (10), третье уравнение системы (1) записываем в виде $\rho=\rho V$, где $\rho=\{\rho_{tl},\ t\in E_1,\ l\in E_2\}$, $V=\{vt_{lkr},\ t,\ k\in E_1,\ l,\ r\in E_2\}$. Для определения вектора ρ фазовое пространство состояний процесса ζ_n запишем в виде $E=\{\bar{k}\}\times R_+\cup\{\bar{r}\}$, где $\bar{k}\in C_1=\{(ikr)\}$, $\bar{r}\in C_2=\{(kr)\}$, $i=1,2$; $k\in E_1$, $r\in E_2$, $R_+=(0,\infty)$. Введем операторы C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}

$$[\tilde{\rho}^{(1)}C_{11}](\bar{k}x)=\sum_{\bar{m}\in C_1}\int_0^\infty\tilde{\rho}_{\bar{m}}^{(1)}(y)\,P_{\bar{m}y}^{\bar{k}x}\,dy,\quad [\tilde{\rho}^{(1)}C_{12}](\bar{r})=\sum_{\bar{m}\in C_1}\int_0^\infty\tilde{\rho}_{\bar{m}}^{(1)}(y)\,P_{\bar{m}y}^{\bar{r}}\,dy,$$

$$[\rho^{(2)}C_{21}](\bar{k}x)=\sum_{\bar{m}\in C_2}\rho_{\bar{m}}^{(2)}P_{\bar{m}}^{\bar{k}x},\quad [\rho^{(2)}C_{22}](\bar{r})=\sum_{\bar{m}\in C_2}\rho_{\bar{m}}^{(2)}P_{\bar{m}}^{\bar{r}}.$$

Тогда систему (1) запишем в виде $\tilde{\rho}_{\bar{k}}^{(1)}(x)=[\tilde{\rho}^{(1)}C_{11}](\bar{k}x)+[\rho^{(2)}C_{21}](\bar{k}x)$, $\rho_{\bar{r}}^{(2)}=[\tilde{\rho}^{(1)}C_{12}](\bar{r})+[\rho^{(2)}C_{22}](\bar{r})$ или в векторной форме —

$$\tilde{\rho}^{(1)}=\tilde{\rho}^{(1)}C_{11}+\rho^{(2)}C_{21},\quad \rho^{(2)}=\tilde{\rho}^{(1)}C_{12}+\rho^{(2)}C_{22}. \tag{11}$$

Из первого уравнения системы (11) находим $\tilde{\rho}^{(1)}=\rho^2C_{21}[I-C_{11}]^{-1}$ и подставим его во второе уравнение $\rho^{(2)}=\rho^{(2)}[C_{21}(I-C_{11})^{-1}C_{12}+C_{22}]$. Оператор $C_{21}(I-C_{11})^{-1}C_{12}+C_{22}=V$ — матрица, причем в соответствии с леммой (1) из [3] V — матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова с фазовым пространством C_2 (разреженной цепи Маркова ξ^{C_2}). Следовательно, V — стохастическая. Неприводимость матрицы V следует из неприводимости матриц P_i и условия 3) теоремы. Отсюда имеем, что решение ρ уравнения $\rho=\rho V$ существует и единственно с точностью до постоянного множителя c: $\rho=c\rho^0$ или $\rho_{ml}=c\rho_{ml}^0$, где ρ_{ml}^0 — элементы вектора ρ^0.

Используя условие нормировки (2), находим постоянную

$$c=\left\{\sum_{k\in E_1}\sum_{r\in E_2}\left[\rho_{kr}^0+\int_0^\infty\sum_{s\in E_1}\sum_{t\in E_2}\rho_{st}^0 b_{sthr}(x)\,dx\right]\right\}^{-1}.$$

Тогда

$$\rho_{ml}=\left\{\sum_{k\in E_1}\sum_{r\in E_2}\left[\rho_{kr}^0+\int_0^\infty\sum_{s\in E_1}\sum_{t\in E_2}\rho_{st}^0 b_{sikr}(x)\,dx\right]\right\}^{-1}\rho_{ml}^0.$$

Замечание. Задачу можно обобщить, предположив, что зависимость двух ПМВ характеризуется вероятностями $p_{kr}^{(1)}$ и $p_{kr}^{(2)}$ ($k\in E_1$, $r\in E_2$), т. е. в момент перехода из состояния из E_1 в состояние $k\in E_1$ с вероятностью $p_{kr}^{(1)}$ происходит переход из состояния $r\in E_2$ в состояние из E_2; в момент перехода из состояния из E_2 в состояние $r\in E_2$ с вероятностью $p_{kr}^{(2)}$ происходит переход из состояния $k\in E_1$ в состояние из E_1. В этом случае следует доопределить умножение на матрицы q_1 и q_2.

1. *Коновалюк В. С.* Двухканальная система с зависимыми отказами.— Кибернетика, 1981, 6, *81—87*.
2. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. *295*.
3. *Королюк В. С., Томусяк А. А., Турбин А. Ф.* Алгоритм укрупнения цепей Маркова с помощью разрежения.— В кн.: Аналитические методы в теории вероятностей. Киев: Наук. думка, 1979. *62—69*.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
17.09.1980 г.