УДК 519.4

В. М. Усенко

О полупрямых произведениях моноидов

Пусть S и T — моноиды, ψ — антигомоморфизм моноида T в полугруппу эндоморфизмов $\mathrm{End}\ S$ моноида S. На множестве $S \times T$ введем операцию по правилу $(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 \cdot t_2(t_1, \psi), t_1 t_2)$, где $s_2(t_1\psi)$ — образ элемента s_2 при эндоморфизме $t_1\psi$. Множество $S \times T$ превращается при этом в моноид, который называется полупрямым произведением моноидов S и T с антигомоморфизмом связи ψ и обозначается через $S \leftthreetimes^{\varphi} T$.

В теории групп конструкция полупрямого произведения часто используется для описания различных классов групп [1]. Кроме того, полупрямое произведение лежит в основе восходящей к Фробениусу конструкции сплетения групп, которая была использована в решении ряда важных задач теории групп [2].

Полупрямое произведение полугрупп впервые было использовано Редеи [3] для обобщения на полугруппы шрейеровой теории групповых расширений. Позже выяснилось, что, с одной стороны, полупрямые произведения и сплетения полугрупп довольно хорошо моделируют каскадные соединения конечных автоматов [4] и могут быть использованы для оценки сложности последних, а с другой стороны, они могут играть существенную роль в изучении различных типов расширений полугрупп [5]. Появились также работы, посвященные изучению свойств конструкций полупрямого произведения и сплетения полугрупп [6, 7].

В настоящей работе изучаются полупрямые произведения моноидов. Терминология, используемая в статье, соответствует принятой в [8].

1. Внутренняя характеристика полупрямого произведения моноидов. 1.1. Образ элемента $t \in T$ при антигомоморфизме $\psi : T \to \mathrm{End}\ S$ обозначим через t^{φ}. Отношение равенства на множестве X — через Δ_X. Если P и Q — подмножества моноида M, то $PQ = \{pq \mid p \in P, \ q \in Q\}$.

1.2. Пусть M — моноид, A и B — его подмоноиды. Подмоноид A назовем L_B-нормальным в M, если $bA \subseteq Ab$ для любого $b \in B$. Если при этом $B = M$, то подмоноид A назовем L-нормальным. Для любого $m \in M$ отношения $\lambda_m = \{(x, y) \in A \times A \mid mx = my\}$, $\rho_m = \{(u, v) \in A \times A \mid um = vm\}$ назовем левым и соответственно правым m-расслоением подмоноида A.

1.3. Теорема. *Следующие утверждения о моноиде $\mathfrak{M}$ и его подмоноидах S и T эквивалентны:* P1) $\mathfrak{M} = S \leftthreetimes^{\psi} T$; P2) *любой элемент* $a \in \mathfrak{M}$ *можно однозначно представить в виде* $a = st$, *где* $s \in S$, $t \in T$; *подмоноид* S L_T*-нормален в* $\mathfrak{M}$; P3) $\mathfrak{M} = ST$ (п. 1.1); *для любых* $t \in T$, $s \in S$ *левое* t*-расслоение* λ_t *подмоноида* S *является конгруэнцией на* S, *а расслоения* $\rho_t \subseteq S \times S$, $\lambda_s \subseteq T \times T$ *совпадают соответственно с отношениями* Δ_S *и* Δ_T.

Доказательство. Проведем его по схеме P1) $\Rightarrow$ P2) $\Rightarrow$ P3) $\Rightarrow$ P1) в три этапа.

1.3.1. P1) $\Rightarrow$ P2) — очевидно.

1.3.2. P2) $\Rightarrow$ P3). По условию любой элемент $a \in \mathfrak{M}$ единственным образом представим в виде $a = st$, где $s \in S$, $t \in T$. Поэтому для любых $s \in S$, $t \in T$ имеют место равенства $\lambda_s = \Delta_T$, $\rho_t = \Delta_S$.

Пусть $x, y \in S$ и $(x, y) \in \lambda_t$. По условию подмоноид S L_T-нормален в $\mathfrak{M}$. Это означает, что для любого $a \in S$ существует $a^t \in S$, для которого $ta = a^t t$. Поэтому для любого элемента $a \in S$ из $(x, y) \in \lambda_t$, следует, что $(ax, ay) \in \lambda_t$, так как $tax = a^t tx = a^t ty = tay$. Это означает, что отношение λ_t стабильно слева. Его стабильность справа следует из определения п. 1.2.

Таким образом, левое t-расслоение λ_t моноида S является конгруенцией на S для любого $t \in T$.

1.3.3. P3) $\Rightarrow$ P1). Ясно, что P3) $\Rightarrow$ P2). Докажем, что P2) $\Rightarrow$ P1). Для этого покажем существование антигомоморфизма $\psi: T \to \operatorname{End} S$ такого, что $\mathfrak{M} \cong S \leftthreetimes^{\psi} T$.

По условию $tS \subseteq St$ при любом $t \in T$. Это означает, как отмечалось в п. 1.3.2, что для любого $s \in S$ существует $s^t \in S$ такой, что $ts = s^t t$. Поэтому можно определить отображение $\psi: t \to t^{\psi}$, где $t^{\psi}: s \mapsto s^t$. Отображение ψ оказывается при этом антигомоморфизмом подмоноида T в полугруппу эндоморфизмов $\operatorname{End} S$ подмоноида S. Действительно, при любом $t \in T$ отображение t^{ψ} является эндоморфизмом подмоноида S, так как из $\rho_t = \Delta_S$ следует его однозначность, а из того, что t-расслоение λ_t — конгруенция на S, его гомоморфность. Однозначность отображения ψ очевидна, а его гомоморфность следует из того, что, во-первых, $\rho_t = \Delta_S$ для любого $t \in T$, а во-вторых, для любых $t_1, t_2 \in T$, $s \in S$, с одной стороны, имеют место равенства $(t_1 t_2) s = s^{t_1 t_2} t_1 t_2 = (s (t_1 t_2)^{\psi}) t_1 t_2$, а с другой, $(t_1 t_2) s = t_1 (t_2 s) = t_1 s^{t_2} t_2 = (s^{t_2})^{t_1} t_1 t_2 = ((s t_2^{\psi}) t_1^{\psi}) t_1 t_2$.

Рассмотрим моноид $\mathfrak{M}' = S \leftthreetimes^{\psi} T$ и положим $(s, t)\alpha = st$. Взаимная однозначность отображения α следует из условий $\rho_t = \Delta_S$, $\lambda_s = \Delta_T$, а гомоморфность проверяется непосредственно. Таким образом, $\mathfrak{M}' = S \leftthreetimes^{\psi} T \cong \mathfrak{M}$.

1.4. Теорема п. 1.3. позволяет элементы (s, t) полупрямого произведения $S \leftthreetimes^{\psi} T$ записывать в виде произведений st. При этом нужно помнить, что $ts = (st^{\psi}) t$.

1.5. В приводимом ниже свойстве L-нормальных подмоноидов выясняется связь между левыми и правыми расслоениями таких подмоноидов.

Пусть M — моноид, U — L — нормальный подмоноид в нем. Положим $U_t = \{x \in U \mid \exists y \in U : xt = ty\}$. Для любого $t \in M$ через $\tilde{\rho}_t$ обозначим ограничение $\rho_t|_{U_t}$ отношения ρ_t на подмножество U_t.

Как и в п. 1.3.2, можно показать, что для любого $t \in M$ левое t-расслоение λ_t L-нормального подмоноида U будет конгруенцией на U.

Предложение. *При любом $t \in M$ множество U_t является подмоноидом в U, а отношение $\tilde{\rho}_t$ — конгруенцией на U_t, причем $U/\lambda_t \cong U_t/\tilde{\rho}_t$.*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in U_t$. Тогда существует пара элементов v_1, v_2, из U такая, что $u_1 t = tv_1$, $u_2 t = tv_2$. Тогда $u_1 u_2 t = u_1 (u_2 t) = u_1 (tv_2) = (u_1 t) v_2 = tv_1 v_2$, т. е. $u_1 u_2 \in U_t$. Таким образом, U_t — подмоноид в U.

Очевидно, что $\tilde{\rho}_t$ — стабильное слева отношение эквивалентности на U_t. Рассуждениями, двойственными к использованным в п. 1.3.2, легко показать, что $\tilde{\rho}_t$ стабильно и справа.

Если через $\lambda_t x$ и $\tilde{\rho}_t x$ обозначить λ_t-класс и соответственно $\tilde{\rho}_t$-класс, содержащие элемент $x \in U$, то в изоморфности моноидов U/λ_t и $U_t/\tilde{\rho}_t$ легко убедиться, поставив в соответствие λ_t-классу $\lambda_t u$ такой $\tilde{\rho}_t$-класс $\tilde{\rho}_t u'$, что $tu = u't$.

2. Полупрямые дополнения пассивного подмоноида. 2.1. Следуя терминологии, принятой в теории групп, подмоноид S в полупрямом разложении $\mathfrak{M} = S \leftthreetimes^{\psi} T$ моноида $\mathfrak{M}$ назовем пассивным подмоноидом, а подмоноид T — активным. При этом будем говорить, что T является полупрямым дополнением пассивного подмоноида, а S — полупрямым дополнением активного подмоноида в моноиде $\mathfrak{M}$.

Через G_M обозначим группу обратимых элементов моноида M. Как обычно, a^{-1} — элемент, обратный к $a \in G_M$.

2.2. Пусть $\mathrm{Map}(M_1, M_2)$ — множество всех однозначных отображений моноида M_1 в моноид M_2. Если $\alpha, \beta \in \mathrm{Map}(M_1, M_2)$, то через $\alpha * \beta$ обозначим отображение, определяемое для любого $x \in M_1$ равенством $x(\alpha * \beta) = x\alpha \cdot x\beta$.

2.3. Пусть φ — антигомоморфизм моноида M_1 в полугруппу эндоморфизмов $\mathrm{End}\, M_2$ моноида M_2. Отображение $\eta \in \mathrm{Map}(M_1, M_2)$ назовем R_φ-квазигоморфизмом моноида M_1 в моноид M_2, если для любых $x, y \in M_1$ выполняется равенство $(xy)\eta = x\eta \cdot (y\eta)\, x^\varphi$.

2.4. Теорема. *Пусть моноид $\mathfrak{M}$ допускает разложение $\mathfrak{M} = S \rtimes^{\psi_1} T$ в полупрямое произведение своих подмоноидов S и T с антигомоморфизмом связи ψ_1. Для подмоноида $U \subseteq \mathfrak{M}$ и антигомоморфизма $\psi_2 : U \to \mathrm{End}\, S$ равенство $\mathfrak{M} = S \rtimes^{\psi_2} U$ выполняется тогда и только тогда, когда $U = T(\sigma * \varepsilon)$, где ε — тождественный автоморфизм моноида T, а $\sigma \in \mathrm{Map}(T, G_S)$ — R_{ψ_1}-квазигомоморфизм. При этом для любого $s \in S$ выполняется равенство $s(t(\sigma * \varepsilon))^{\psi_2} = t\sigma \cdot (s)\, t^{\psi_1} \cdot (t\sigma)^{-1}$.*

Доказательство. В доказательстве все выкладки произведены с учетом замечания п. 1.4.

Достаточность. Пусть $\sigma \in \mathrm{Map}(T, G_S)$ — R_{ψ_1}-квазигомоморфизм. Тогда $\sigma * \varepsilon$ — изоморфизм моноидов. Действительно, так как каждый элемент из $\mathfrak{M}$ единственным образом представим в виде произведения st, где $s \in S$, $t \in T$, то из равенства $t_1(\sigma * \varepsilon) = t_2(\sigma * \varepsilon)$ вытекает, что $t_1 = t_2$. Кроме того, для любых $t_1, t_2 \in T$ с учетом п. 1.4. получаем $(t_1 t_2)\, \sigma * \varepsilon = t_1\sigma \cdot (t_2\sigma) \times \times t_1^{\psi_1} \cdot t_1 t_2 = t_1(\sigma * \varepsilon) \cdot t_2(\sigma * \varepsilon)$.

Пусть $U = \mathrm{Im}(\sigma * \varepsilon)$ — образ подмоноида T при изоморфизме $\sigma * \varepsilon$. Для любых $t \in T$, $s \in S$ полагаем $u_t = t(\sigma * \varepsilon)$, $(s)\, u_t^{\psi_2} = t\sigma \cdot (s)\, t^{\psi_1} \cdot (t\sigma)^{-1}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $u_t^{\psi_2}$ — эндоморфизм моноида S. Отображение $\psi_2 : u_t \mapsto u_t^{\psi_2}$ при этом оказывается антигомоморфизмом моноида U в полугруппу эндоморфизмов $\mathrm{End}\, S$ моноида S. Действительно, для любых $s \in S$, $t_1, t_2 \in T$ имеем $(s)(u_{t_1} u_{t_2})^{\psi_2} = (t_1 t_2)\, \sigma \cdot (s)(t_1 t_2)^{\psi_1} \cdot ((t_1 t_2)\, \sigma)^{-1} = t_1\sigma \cdot (t_2\sigma \cdot (s) \times \times t_2^{\psi_1} \cdot (t_2\sigma)^{-1})\, t_1^{\psi_1} \cdot (t_1\sigma)^{-1} = ((s)\, u_{t_2}^{\psi_2})\, u_{t_1}^{\psi_2}$. Замечая, что для любых $s \in S$, $t \in T$ имеет место равенство $st = s(t\sigma)^{-1} u_t$, приходим к выводу, что $S \rtimes^{\psi_1} T = S \rtimes^{\psi_2} U$.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{M} = S \rtimes^{\psi_1} T = S \rtimes^{\psi_2} U$. Тогда для любого $u \in U$ найдется (и притом единственная) пара элементов $t \in T$, $s_t \in S$ таких, что $u = s_t t$. Обратно, для любого $t \in T$ существуют однозначно определенные элементы $u' \in U$, $s_{u'} \in S$ для которых $t = s_{u'} u'$. Тогда $u = s_t t = s_t s_{u'} u'$, откуда $u = u'$, $s_t s_{u'} = 1$. Положим $t\sigma = s_t$.

Элементы s_t, как показано выше обратимы, поэтому $\sigma \in \mathrm{Map}(T, G_S)$. Покажем, что σ — R_{ψ_1}-квазигомоморфизм. Для этого рассмотрим элементы $u_1 = s_{t_1} t_1$, $u_2 = s_{t_2} t_2$, где $s_{t_1}, s_{t_2} \in G_S$. Для них $u_1 u_2 = s_{t_1} t_1 s_{t_2} t_2 = s_{t_1}((s_{t_2})\, t_1^{\psi_1})\, t_1 t_2$. Таким образом, $t_1\sigma = s_{t_1}$, $t_2\sigma = s_{t_2}$, а $(t_1 t_2)\sigma = t_1\sigma \cdot (t_2\sigma)\, t_1^{\psi_1}$ и σ оказывается R_{ψ_1}-квазигомоморфизмом.

Отметим, что для любых элементов $u \in U$, $s \in S$, мы, с одной стороны, имеем равенство $us = (s)\, u^{\psi_2} \cdot u = s(t(\sigma * \varepsilon))^{\psi_2} \cdot t\sigma \cdot t$, а с другой, $us = t(\sigma * \varepsilon)s = t\sigma \cdot (s)\, t^{\psi_1} \cdot t$. Отсюда $s(t(\sigma * \varepsilon))^{\psi_2} \cdot t\sigma \cdot t = t\sigma \cdot (s)\, t^{\psi_1} \cdot t$. Окончательно получаем $s(t(\sigma * \varepsilon))^{\psi_2} = t\sigma \cdot (s)\, t^{\psi_1} \cdot (t\sigma)^{-1}$.

Для групп близкие вопросы рассмотрены в [9].

3. Описание класса SD. 3.1. Обозначим для краткости полупрямое произведение $S \rtimes^{\psi} T$ через $\langle \psi \rangle$ и введем в рассмотрение класс $SD = \{\langle \psi \rangle \mid \psi \in \Phi\}$, где Φ — множество всех антигомоморфизмов моноида T в полугруппу эндоморфизмов $\mathrm{End}\, S$ моноида S.

3.2. Пусть PE — полугруппа всех частичных эндоморфизмов полугруппы $\mathrm{End}\, S$. Если $h \in PE$, то через $d(h)$ обозначим область определения частичного эндоморфизма h полугруппы End S, а через $i(h)$ — область его значений.

3.3. Пусть $E_S = \{f \in \operatorname{End} S \mid f^2 = f\}$. Если $\pi \in E_S$, то через ψ_π обозначим антигомоморфизм, переводящий T в π. Через θ_e^f обозначим элемент из PE, для которого $d(\theta_e^f) = f$, $i(\theta_e^f) = e$, где $e, f \in E_S$.

3.4. Конгруенцию на T, определяемую антигомоморфизмом ψ, обозначим через $\varkappa_\psi$, а образ $\operatorname{Im}\psi$ антигомоморфизма ψ в полугруппе End S — через T_ψ.

3.5. Для любого $\pi \in E_S$ через S^π обозначим моноид, который получается из S введением операции $\circ$ по правилу $x \circ y = x \cdot (y\pi)$.

3.6. Пусть $h \in PE$, причем $d(h) \supseteq T_\psi$, $\psi \in \Phi$. Для любых $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in \langle\psi\rangle$, положим $(s_1, t_1) \perp (s_2, t_2) = (s_1 \cdot s_2(t_1^\psi h), t_1 t_2)$. Получим некоторое полупрямое произведение $\langle\psi'\rangle$ отличное, вообще говоря, от $\langle\psi\rangle$. Обозначим его через $\langle\psi\rangle^h$.

3.7. В классе SD определим эквивалентность ω так: $(\langle\psi_1\rangle, \langle\psi_2\rangle) \in \omega \Leftrightarrow 1_T\psi_1 = 1_T\psi_2$, где 1_T — единичный элемент моноида T. Класс эквивалентности ω, для которого $1_T\psi_1 = 1_T\psi_2 = f \in E_S$ обозначим через $\mathfrak{K}_f$.

В каждом классе $\mathfrak{K}_f$ введем отношение порядка δ_f по правилу $(\langle\psi_1\rangle, \langle\psi_2\rangle) \in o_f \Leftrightarrow \varkappa_{\psi_1} \subset \varkappa_{\psi_2}$ или $\varkappa_{\psi_1} = \varkappa_{\psi_2} \,\&\, T_{\psi_1} \subseteq T_{\psi_2}$.

3.8. Предложение. *Полупрямое произведение* $\langle\psi_\pi\rangle$ *является наибольшим элементом в частично упорядоченном множестве* $\{\mathfrak{K}_\pi^\pi, o_\pi\}$. *При этом* $\langle\psi_\pi\rangle \cong S^\pi \times T \cong (S \times T)^\delta$ *для некоторого идемпотентного эндоморфизма* δ *моноида* $S \times T$. *Кроме того, для любых* $f_1, f_2 \in E_S$ *имеет место равенство* $\langle\psi_{f_1}\rangle = \langle\psi_{f_2}\rangle^{\theta_{f_1}^{f_2}}$.

Доказательство. Поскольку $\varkappa_\psi \subseteq \varkappa_{\psi_\pi}$ для любого $\langle\psi\rangle \in \mathfrak{K}_\pi$, то $\langle\psi_\pi\rangle$, действительно, является наибольшим элементом в $\{\mathfrak{K}_\pi^\pi, o_\pi\}$. Если положить $\delta: (s, t) \mapsto (s^\pi, t)$, то изоморфизм моноида $\langle\psi_\pi\rangle$ и моноидов $S^\pi \times T$, $(S \times T)^\delta$ устанавливается отображением $(s, t) \mapsto (s, t)$.

Для любых $f \in E_S$ и $s \in S$ имеем $(s)t^{\psi_f} = sf$. Поэтому $(s)t^{\psi_{f_1}} = sf_1 = (sf_2)\theta_{f_1}^{f_2}$. Значит, $\langle\psi_{f_1}\rangle = \langle\psi_{f_2}\rangle^{\theta_{f_1}^{f_2}}$.

3.9. Для любых $\psi_1, \psi_2 \in \Phi$ положим

$$\langle\psi_1\rangle \vee \langle\psi_2\rangle = \langle\psi\rangle \Leftrightarrow \varkappa_\psi = \bigcap_{\substack{\varkappa_{\psi'} \supseteq \varkappa_{\psi_1} \\ \varkappa_{\psi'} \supseteq \varkappa_{\psi_2}}} \varkappa_{\psi'}.$$

$$\langle\psi_1\rangle \wedge \langle\psi_2\rangle = \langle\psi\rangle \Leftrightarrow \varkappa_\psi = \varkappa_{\psi_1} \cap \varkappa_{\psi_2}.$$

Операция $\vee$ в SD оказывается при этом всюду определенной, тогда как операция $\wedge$ определена лишь частично: $\langle\psi_1\rangle \wedge \langle\psi_2\rangle$ принадлежит SD тогда и только тогда, когда $T/(\varkappa_{\psi_1} \cap \varkappa_{\psi_2})$ изоморфно вкладывается в End S.

3.10. Теорема. *Для любого* $f \in E_S$ *класс* $\mathfrak{K}_f$ *относительно операции* $\vee$ *образует верхнюю полуструктуру с единицей* $\langle\psi_f\rangle$. *При этом*

1) $\langle\psi_1\rangle \vee \langle\psi_2\rangle = \langle\psi\rangle \Leftrightarrow \exists h_1, h_2 \in PE : \langle\psi_1\rangle = \langle\psi\rangle^{h_1}, \langle\psi_2\rangle = \langle\psi\rangle^{h_2}$;

2) $\langle\psi_1\rangle \wedge \langle\psi_2\rangle = \langle\psi\rangle \Leftrightarrow \exists h_1, h_2 \in PE : \langle\psi_1\rangle^{h_1} = \langle\psi_2\rangle^{h_2} = \langle\psi\rangle$.

Доказательство. То, что $\mathfrak{K}_f$ образует верхнюю полуструктуру относительно $\vee$ с единицей $\langle\psi_f\rangle$, следует из п. 3.8, 3.9.

Для доказательства 1), 2) достаточно заметить, что $\varkappa_\psi \subseteq \varkappa_{\psi_1} \Leftrightarrow \exists h \in PE : \langle\psi_1\rangle = \langle\psi\rangle^h$. Действительно, если $\varkappa_\psi \subseteq \varkappa_{\psi_1}$, то по теореме об индуцированном гомоморфизме [8] существует гомоморфизм $h: T_\psi \to T_{\psi_1}$, т. е. частичный эндоморфизм полугруппы End S с $d(h) = T_\psi$ и $i(h) = T_{\psi_1}$. А это и означает, что $\langle\psi_1\rangle = \langle\psi\rangle^h$. Поэтому 1) и 2) являются простыми следствиями этого факта.

3.11. Дадим внутреннюю характеристику связи полупрямых произведений $\langle\psi_1\rangle$ и $\langle\psi_2\rangle$, выражаемой равенством $\langle\psi_2\rangle=\langle\psi_1\rangle^h$. Напомним для этого, что соответствием ([10], § 17), или гомоморфным отношением на моноиде M называется отношение $\zeta\subseteq M\times M$, для которого при любых $t_1, t_2, t_1', t_2'\in M$ выполняется условие $(t_1, t_2), (t_1', t_2')\in\zeta\Rightarrow(t_1t_1', t_2t_2')\in\zeta$.

Для соответствия ζ через $x\zeta$ обозначим множество $\{y\in M\mid(x, y)\in\zeta\}$.

Предложение. *Каковы бы ни были $\langle\psi_1\rangle, \langle\psi_2\rangle\in SD$, $h\in PE$, равенство $\langle\psi_2\rangle=\langle\psi_1\rangle^h$ выполняется тогда и только тогда, когда существует соответствие $\gamma\subseteq T\times T$ такое, что для любого $t\in T$ выполняется соотношение $t^{\psi_1}h=(t\gamma)^{\psi_2}$.*

Доказательство. Пусть $\langle\psi_2\rangle=\langle\psi_1\rangle^h$ для некоторого $h\in PE$. Для $t_1, t_2\in T$ положим $(t_1, t_2)\in\gamma\Leftrightarrow t_1^{\psi_1}h=t_2^{\psi_2}$. Кроме того, если $(t_1', t_2')\in\gamma$, то из равенств $t_1^{\psi_1}h=t_2^{\psi_2}$, $(t_1')^{\psi_1}h=(t_2')^{\psi_2}$ следует, что $t_1^{\psi_1}h\cdot(t_1')^{\psi_1}h=t_2^{\psi_2}\cdot(t_2')^{\psi_2}$. Отсюда вытекает, что $(t_1^{\psi_1}(t_1')^{\psi_1})h=(t_1't_1)^{\psi_1}h=(t_2't_2)^{\psi_2}$ т. е. $(t_1't_1, t_2't_2)\in\gamma$ и γ оказывается соответствием, для которого, как легко видеть, выполняется равенство $t^{\psi_1}h=(t\gamma)^{\psi_2}$. Обратное утверждение очевидно.

3.12. Вопросы, близкие к рассматриваемому в данном пункте, для прямых произведений групп решены в [11].

Предложение. *Для гомоморфизмов $\varphi: S_1\leftthreetimes^{\psi_1}T_1\to S_2\leftthreetimes^{\psi_2}T_2$, $\chi:S_1\to S_2$, $\tau:T_1\to T_2$ равенство $(st)\varphi=s\chi\cdot t\tau$ при любых $s\in S_1$, $t\in T_1$ выполняется тогда и только тогда, когда для любого $x\in T_1$ имеет место равенство*

$$x^{\psi_1}\chi=\chi(x\tau)^{\psi_2}. \tag{*}$$

Доказательство. Пусть $\chi\in\mathrm{Hom}(S_1, S_2)$, $\tau\in\mathrm{Hom}(T_1, T_2)$ и для любого $x\in T_1$ выполнено равенство (*). Покажем, что $(st)\varphi=s\chi\cdot t\tau$ — гомоморфизм моноидов $S_1\leftthreetimes^{\psi_1}T_1$, $S_2\leftthreetimes^{\psi_2}T_2$. Однозначность отображения φ очевидна. Кроме того, для $s_1t_1, s_2t_2\in S_1\leftthreetimes^{\psi_1}T_1$ имеем $(s_1t_1\cdot s_2t_2)\varphi=(s_1\cdot(s_2)t_1^{\psi_1})\chi\times(t_1t_2)\tau=s_1\chi\cdot(s_2\chi)(t_1\tau)^{\psi_1}\cdot t_1\tau\cdot t_2\tau=(s_1t_1)\varphi\cdot(s_2t_2)\varphi$.

Пусть теперь $\varphi\in\mathrm{Hom}(S_1\leftthreetimes^{\psi_1}T_1, S_2\leftthreetimes^{\psi_2}T_2)$, $\chi\in\mathrm{Hom}(S_1, S_2)$, $\tau\in\mathrm{Hom}(T_1, T_2)$ и для любых $s\in S_1$, $t\in T_1$ выполнено равенство $(st)\varphi=s\chi\cdot t\tau$. Тогда с учетом замечания п. 1.4, имеем $(ts)\varphi=t\varphi\cdot s\varphi=t\tau\cdot s\chi=(s\chi)(t\tau)^{\psi_2}\times t\tau$, или $(ts)\varphi=((s)t^{\psi_1}\cdot t)\varphi=(st^{\psi_1})\chi\cdot t\tau$. Поэтому $(st^{\psi_1})\chi=(s\chi)(t\tau)^{\psi_2}$, а это означает, что равенство (*) выполняется для любого $x\in T_1$.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980, *284*.
2. *Kaloujnine L. A.* Sur les p-groupes de Sylow du groupe simétrique du degré p^m.— C. r. Acad. sci. A., 1945, 221, *222—224*.
3. *Redei L.* Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie.— Acta sci. math., 1952, **14**, *252—273*.
4. *Krohn K.*, *Rhodes J.* Algebraic theory of machines. Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **116**, *450—464*.
5. *Глускин Л. М.* О плотных расширениях.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1973, 29, *119—131*.
6. *Фортунатов В. А.* О полупрямых произведениях полурешетки и группы.— Теория полугрупп и ее приложения, 1974, 3, *129—139*.
7. *Nakajima S.* On the Kernel of the Wreath-Product of Completely Simple Semigroups.— Semigroup Forum, 1979, 18, 1, *21—26*;
8. *Клиффорд А.*, *Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972, *420*.
9. *Mader A.* A note on direct and semi-direct products of groups.— Math. Z., 1967, 95, 4, *272—275*.
10. *Курош А. Г.* Общая алгебра. М.: Наука, 1974. *158*.
11. *Szymiczek K.* Note on semigroup homomorphisms.— Prace nauk. UŠl. Katowicach, 1973, 30, *75—78*.

Харьковский
институт радиоэлектроники

Поступила в редакцию
17.11.1980 г.