УДК 519.21

Я. И. Елейко

Переходные явления для ветвящихся процессов с произвольным числом типов и дискретным временем

В этой статье исследуются переходные явления, возникающие в теории ветвящихся процессов с произвольным числом типов и дискретным временем [1—4].

Пусть задана последовательность ветвящихся процессов, зависящих от некоторого параметра, с дискретным временем и произвольным числом типов T. В пространстве T задана σ-алгебра $\mathfrak{T}$.

Функцию распределения жизни одной частицы типа t процесса с параметром ε обозначим через $p_k^\varepsilon(t) = P_t^\varepsilon\{\tau = k\}$, где τ — время жизни частицы, P_t — условная вероятность при условии, что в начальный момент была одна частица типа t.

Символом

$$F_n^\varepsilon(t, \varphi(\cdot)) = M_t \exp\left\{-\int_T \varphi(u)\, \xi_n^\varepsilon(du)\right\}$$

обозначим функционал Лапласа, где $\xi_n^\varepsilon(du)$—случайная мера, обозначающая количество частиц в момент времени n процесса с параметром ε, типы которых принадлежат измеримому множеству $du \in \mathfrak{T}$; $\varphi(u)$ — $\mathfrak{T}$-измеримая ограниченная функция.

Далее, пусть $h_k^\varepsilon(t, \varphi(\cdot))$ — условный производящий функционал потомства одной частицы типа t при условии, что превращение произошло в возрасте k:

$$h_k^\varepsilon(t, \varphi(\cdot)) = M_t\left(\exp\int_T \log\varphi(u)\, \xi_\tau^\varepsilon(du)/\tau = k\right),$$

где $\xi_\tau^\varepsilon(du)$ — количество частиц потомков в момент времени τ, типы которых принадлежат $du \in \mathfrak{T}$, являющийся случайной мерой.

Обозначим $M_k^\varepsilon(t, s) = M_t\{\xi_\tau^\varepsilon(s) / \tau = k\}$ — первый факториальный момент, а второй $B_k^\varepsilon(t, S_1, S_2) = M_t\{\xi_\tau^\varepsilon(S_1)\, \xi_\tau^\varepsilon(S_2)/\tau = k\} - M_t\{\xi_\tau^\varepsilon(S_1 \cap S_2)/\tau = k\}$, $B^\varepsilon(t, S_1, S_2) = M_t\{\xi_\tau^\varepsilon(S_1)\, \xi_\tau^\varepsilon(S_2)\} - M_t\{\xi_\tau^\varepsilon(S_1 \cap S_2)\}$;

$$M_t^\varepsilon(s) = \sum_k p_k^\varepsilon(t)\, M_k^\varepsilon(t, s) = M_t\{\xi_\tau^\varepsilon(s)\}; \quad \mu^\varepsilon(t, s) = \sum_k k M_t[\xi_\tau^\varepsilon(s)\, I_{\{\tau=k\}}] = M_t[\tau\xi_\tau^\varepsilon(s)],$$

где $I_{\{\tau=k\}}$ — индикатор множества $\{\tau = k\}$ $\gamma^\varepsilon(y) = \sum_k k p_k^\varepsilon(y)$; $A_k^\varepsilon(t, S) =$

$= M_t[\xi_\tau^\varepsilon(S)\, I_{\{\tau=k\}}]$; $Q_\varepsilon(u)\, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{inu} \int_T M_x[\xi_\tau^\varepsilon(dy)\, I_{\{\tau=n\}}]\, g(y)$, $g(y)$ — измеримая ограниченная функция.

Все предельные значения при $\varepsilon \to 0$ будем в дальнейшем обозначать без индекса ε, а норму оператора — $\|\cdot\|$.

Теорема. *Если* 1) $\sup\limits_{t, S_1, S_2, \varepsilon} B^\varepsilon(t, S_1, S_2) < \infty$; $\inf\limits_t A_1(t, T) > 0$;

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B^\varepsilon(t, S_1, S_2) = B(t, S_1, S_2); \quad \lim_{\varepsilon\to 0} A_k^\varepsilon(t, S) = A_k(t, S);$$

$\lim_{n\to\infty} \sup_{\varepsilon, x} \sum_{k=n}^{\infty} \int_T k A_k^{\varepsilon}(x, dz) = 0; \quad \lim_{k\to\infty} \sup_{t, \varepsilon} \sum_{k=n}^{\infty} n p_n^{\varepsilon}(t) = 0; \quad p_n^{\varepsilon}(t) \to p_n(t); \quad \varepsilon \to 0;$

$\| Q_{\varepsilon}(u) \| < 1$ *для всех* ε *и* $u \neq 0$ $|u| \leqslant \pi$;

2) *оператор, определенный ядром* $M_t(S) = \lim_{\varepsilon\to 0} M_t^{\varepsilon}(S)$, *имеет единицу изолированной точкой спектра в пространстве функций с собственной функцией* $f(x)$ *такой, что* $r_1 < f(x) < r_2 (r_1, r_2$ — *положительные константы) и конечную инвариантную меру* $\nu(dy)$ $\int_T \nu(dt) M_t(dy) = \nu(dy)$. *Тогда для положительной измеримой функции* $\varphi(u)$ *такой, что* $0 < \varphi(u) \leqslant 1$ *и* $x \geqslant 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n P_t \left\{ \frac{1}{n} \int_T \varphi(u) \xi_n^{\varepsilon}(du) \geqslant x \right\} = f(t) \frac{2}{B} \frac{c/\mu}{1 - e^{-c/\mu}} \times$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{2}{B} \frac{c/\mu}{1 - e^{-c/\mu}} \frac{x}{A(\varphi(\cdot))} \right\},$$

как только $n(1 - \rho_{\varepsilon}) \to c$ *при* $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, *где* ρ_{ε} — *изолированное собственное значение оператора, определяемого ядром* $M_t^{\varepsilon}(S)$

$$A(\varphi(\cdot)) = \left[\int_T \int_T \nu(dy) \mu(y, dz) f(z) \right]^{-1} \int_T \nu(dy) \gamma(y) \varphi(y);$$

$$B = \left[\int_T \int_T \nu(dy) \mu(y, dz) f(z) \right]^{-1} \int_T \int_T \int_T \nu(dy) B(y, ds_1, ds_2) f(s_1) f(s_2),$$

$$\mu = \sum_k k \int_T \int_T A_k(x, dz) f(z) \nu(dx).$$

Замечание. Выражение B определено вследствие того, что $B(y, S_1, S_2)$ является бивариантной мерой по $S_1 \in \mathfrak{T}$, $S_2 \in \mathfrak{T}$.

При доказательстве теоремы нами использованы леммы 1 и 2 из работы [6].

Доказательство. Согласно теоремы сходимости из [5], с. 634, достаточно показать, что существует такое $\delta > 0$ (возможно зависящее от t), что при $0 \leqslant \lambda \leqslant \delta$

$$n\left[1 - F_n^{\varepsilon}\left(t, \frac{\lambda}{n} \varphi(\cdot)\right)\right] = f(t) \frac{\lambda A(\varphi(\cdot)) e^{-c/\mu}}{1 - \frac{\lambda B}{2} \frac{e^{-c/\mu} - 1}{c/\mu} A(\varphi(\cdot))}, \quad n \to \infty, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$n(1 - \rho_{\varepsilon}) \to c. \tag{1}$$

Обозначим $g_k^{\varepsilon}(t, \psi(\cdot)) = 1 - h_k^{\varepsilon}(t, 1 - \psi(\cdot))$; $R_n^{\varepsilon}(t, \lambda) = 1 - F_n^{\varepsilon}(t, \lambda\varphi(\cdot))$. Тогда

$$R_n^{\varepsilon}(t, \lambda) = [1 - e^{-\lambda\varphi(t)}] r_{n+1}^{\varepsilon}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k^{\varepsilon}(t) g_k^{\varepsilon}[t, R_{n-k}^{\varepsilon}(\cdot, \lambda)], \tag{2}$$

где $r_{n+1}^{\varepsilon}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k^{\varepsilon}(t)$.

Используя теорему 1 из [1], с. 112 и лемму 1 из [1], с. 420 для $g_k^{\varepsilon}(t, \overline{\varphi}(\cdot))$ можно записать следующее представление:

$$g_k^{\varepsilon}(t, \overline{\varphi}(\cdot)) = \int_T M_k^{\varepsilon}(t, ds) \overline{\varphi}(s) - \frac{1}{2} \int_T \int_T B_k^{\varepsilon}(t, du, ds) \overline{\varphi}(u) \overline{\varphi}(s) +$$
$$+ \int_T \int_T \varepsilon_k^{\varepsilon}(t, du, ds, \overline{\varphi}(\cdot)) \overline{\varphi}(s) \overline{\varphi}(u). \tag{3}$$

Здесь

$$\int_T\int_T \varepsilon_k^\varepsilon(t, du, ds, \overline{\varphi}(\cdot))\,\overline{\varphi}(u)\,\overline{\varphi}(s) \leqslant \frac{1}{2}\int_T\int_T B_k^\varepsilon(t, du, ds)\,\overline{\varphi}(u)\,\overline{\varphi}(s);\ \ \overline{\varphi}(u) \geqslant 0,$$

$$\varepsilon_k^\varepsilon(t, T, T, \overline{\varphi}(u)) \to 0 \ \text{ при } \sup_x |\overline{\varphi}(x)| \to 0.$$

Идея дальнейшего доказательства теоремы состоит в том, чтобы сравнить $R_n^\varepsilon(t, \lambda)$ с решением ${}_0R_n^\varepsilon(t, \lambda)$:

$$ {}_0R_n^\varepsilon(t, \lambda) = \left[\lambda\varphi(t) - \frac{1}{2}\lambda^2\varphi^2(t)\right] r_{n+1}^\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{n}\left[\int_T M_k^\varepsilon(t, ds)\,{}_0R_{n-k}^\varepsilon(s, \lambda)\,p_k^\varepsilon(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_T\int_T B_k^\varepsilon(t, du, ds)\,{}_0R_{n-k}^\varepsilon(u, \lambda)\,{}_0R_{n-k}^\varepsilon(s, \lambda)\,p_k^\varepsilon(t)\right]. \tag{4}$$

Построим решение (4) и исследуем его свойства. Будем искать его в виде

$$ {}_0R_n^\varepsilon(t, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_n^\varepsilon(t, m)\,\frac{\lambda^m}{m!}. \tag{5}$$

Если такое решение существует, то коэффициенты $\varphi_n^\varepsilon(t, m)$ должны удовлетворять следующим соотношениям $m \geqslant 3$:

$$\varphi_n^\varepsilon(t, m) = \sum_{k=1}^{m}\int_T \varphi_{n-k}^\varepsilon(u, m)\,A_k^\varepsilon(t, du) -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m-1}\frac{m!}{r!\,(m-r)!}\sum_{k=1}^{n}\int_T\int_T \varphi_{n-k}^\varepsilon(u, m-r)\,\varphi_{n-k}^\varepsilon(s, m-r)\,B_k^{\varepsilon,t}(du, ds); \tag{6}$$

$$B_k^{\varepsilon,t}(du, ds) = B_k^\varepsilon(t, du, ds)\,p_k^\varepsilon(t).$$

Для $\varphi_n^\varepsilon(t, 1)$ получаем уравнение многомерного восстановления

$$\varphi_n^\varepsilon(t, 1) = \varphi(t)\,r_{n+1}^\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{n}\int_T A_k^\varepsilon(t, du)\,\varphi_{n-k}^\varepsilon(u, 1). \tag{7}$$

Поскольку выполняются все условия леммы 2 из [6], то

$$\varphi_n^\varepsilon(t, 1) \to f(t)\,e^{-c/\mu}\cdot\frac{1}{\mu}\int_T \nu(du)\,\varphi(u)\,r_{n+1}(t),\ \ n \to \infty,\ \ \varepsilon \to 0,\ \ n(1-\rho_\varepsilon) \to c. \tag{8}$$

Не ограничивая общности в целях упрощения формул, положим $\int_T f(x)\,\nu(dx) = 1$. Для всех n имеем

$$c_0 < \varphi_n^{\varepsilon_n}(t, 1) < c_1 \ \text{ при } \ n \to \infty,\ \ \varepsilon_n \to 0,\ \ (1-\rho_{\varepsilon_n})\,n \to c. \tag{9}$$

Это следует из того, что неравенство выполняется при $n > n_0$, затем делаем сдвиг влево на n_0. Оценка снизу в (9) получается из условий 1) теоремы и уравнения (7). Оценка сверху в неравенстве (9) легко следует из (8). Далее под ε будем понимать ε_n из (9).

Соотношения (6) также имеют вид уравнений восстановления. Это позволяет $\varphi_n^\varepsilon(t, m)$ выразить через $\varphi_n^\varepsilon(t, j)$, $j = 1, \dots, m-1$, и заключить, что $\varphi_n^\varepsilon(t, m)$ определяется из (6) единственным образом. При $m=2$ имеем

$$\varphi_n^\varepsilon(t, 2) = -\frac{1}{2}\left[\varphi^2(t)\, r_{n+1}^\varepsilon(t) - \sum_{k=1}^{n}\int_T\int_T \varphi_{n-k}^\varepsilon(s, 1)\,\varphi_{n-k}^\varepsilon(u, 1)\, B_k^{\varepsilon,t}(du, ds)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{n}\int_T \varphi_{n-k}^\varepsilon(u, 2)\, A_k^\varepsilon(t, du).$$

Решение этого уравнения оценивается по модулю следующим образом:

$$|\varphi_n^\varepsilon(t, 2)| \leqslant \bar{c}_1^2 L\left(\sup_{t,\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\overline{H}_k^\varepsilon(t, T) + 1\right),$$

где $L = \frac{1}{2}\sup\limits_{t,\varepsilon}(B^\varepsilon(t, T, T), 2)$; $\bar{c}_1 > 1$, а $\overline{H}_k^\varepsilon(t, T)$—не что иное как $H_t^\varepsilon(k, T)$ в обозначениях лемм из [6], построенное по ядру $P_t^\varepsilon(k, dy) = A_k^\varepsilon(t, dy)$.

Следовательно, $|\varphi_n^\varepsilon(t, 2)| \leqslant c_1^2 L h(n)$, где $h(n) = \sup\limits_{t,\varepsilon}\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{H}_k^\varepsilon(t, T) + 1$, $h(n)$ — монотонно возрастающая функция.

Введем последовательность

$$c_1 = \bar{c}_1, \quad c_m = \sum_{r=1}^{m-1} c_r c_{m-r}\frac{m!}{r!\,(m-r)!}, \quad m \geqslant 2, \tag{10}$$

и покажем, что

$$\varphi_n^\varepsilon(t, m) \leqslant c_m (L h(n))^{m-1}. \tag{11}$$

Доказательство этого неравенства проведем индукцией по m. При $m = 1$ неравенство (11) превращается в (9). При $m = 2$, (11) доказано выше. Чтобы сделать шаг индукции заметим, что из (6) вытекает неравенство

$$|\varphi_n^\varepsilon(t, m)| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_T \varphi_{n-k}^\varepsilon(u, m)\, A_k^\varepsilon(t, du) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m-1} c_r c_{m-r}\left.\sum_{k=1}^{r} L h(n-k)\right]^{m-r} B_k^{\varepsilon,t}(T, T).$$

Отсюда получаем

$$|\varphi_n^\varepsilon(t, m)| \leqslant c_m L^{m-1} h^{m-2}(n) + \sum_{k=1}^{n}\int_T \varphi_{n-k}^\varepsilon(u, m)\, A_k^\varepsilon(t, du).$$

Итерируя данное неравенство получаем

$$|\varphi_n^\varepsilon(t, m)| \leqslant c_m L^{m-1} h^{m-2}(n) + \sum_{k=1}^{n}\overline{H}_k^\varepsilon(t, T).$$

Отсюда просто следует (11).

Далее из (10) вытекает, что при $|\lambda| < \frac{1}{4c_1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c_1\lambda}}{2}. \tag{12}$$

Поэтому ряд (5) сходится абсолютно по n, равномерно по t и ε при $|\lambda| < (4c_1Lh(n))^{-1}$. Умножая уравнения (6) на $\frac{\lambda^n}{n!}$ и суммируя по n убеждаемся, что сумма ряда (5) есть решение уравнения (4).

Далее из (11) и (12) легко вытекают неравенства

$$|{}_0R_n^\varepsilon(t, \lambda)| < 2c_1\lambda; \quad |{}_0R_n^\varepsilon(t, \lambda)| \leqslant \frac{(2c_1Lh(n))^2}{(1-4c_1Lh(n)\lambda)^{3/2}},$$

справедливые при $0 \leqslant \lambda \leqslant (4c_1Lh(n))^{-1}$. Из этих неравенств и (9) следует существование такого $\delta > 0$, что при $0 \leqslant \lambda \leqslant \delta/h(n)$

$$0 \leqslant |{}_0R_n^\varepsilon(t, \lambda)| \leqslant \min(1, 2c_1\lambda). \tag{13}$$

Покажем теперь, что

$$\left[R_n^\varepsilon\left(t, \frac{\lambda}{n}\right) - {}_0R_n^\varepsilon\left(t, \frac{\lambda}{n}\right)\right] \to 0, \ n \to \infty, \ \varepsilon \to 0, \ (1-\rho_\varepsilon)n \to c. \tag{14}$$

Для этого заметим, что для больших n с некоторой постоянной K вытекает неравенство

$$h(n)/n < K, \tag{15}$$

следующее из неравенства

$$\sup_{t,\varepsilon,n} \overline{H}_n^\varepsilon(t, T) < M, \quad M > 0.$$

Подберем такое натуральное N, чтобы при $0 \leqslant \lambda \leqslant \delta/K$ имело место неравенство $\lambda/N \leqslant \delta/h(n)$. Тогда при $n \leqslant N$ можно записать тождество, следующее из (3) и из уравнений для $R_n^\varepsilon(t, \lambda)$ и ${}_0R_n^\varepsilon(t, \lambda)$:

$$R_n^\varepsilon\left(t, \frac{\lambda}{N}\right) - {}_0R_n^\varepsilon\left(t, \frac{\lambda}{N}\right) = \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{N}\varphi(t)} - \frac{\lambda}{N}\varphi(t) - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{N^2}\varphi^2(t)\right] r_{n+1}^\varepsilon(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} p_k^\varepsilon(t)\left[h_k^\varepsilon\left(t, R_{n-k}^\varepsilon\left(\cdot, \frac{\lambda}{N}\right) - h_k^\varepsilon\left(t, {}_0R_{n-k}^\varepsilon\right)\cdot, \frac{\lambda}{N}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_T \int_T \varepsilon_k^\varepsilon\left(t, du, ds, {}_0R_{n-k}^\varepsilon\left(\cdot, \frac{\lambda}{N}\right)\right) {}_0R_{n-k}^\varepsilon\left(u, \frac{\lambda}{N}\right) {}_0R_{n-k}^\varepsilon\left(s, \frac{\lambda}{N}\right),$$

$$\rho^\varepsilon(\lambda) \to 0, \ \lambda \to 0.$$

В силу свойств функции $\varepsilon_k^\varepsilon(t, du, ds, \psi(\cdot))$ и аналогов теоремы 2 из работы [1], с. 120, запишем:

$$\left|R_n^\varepsilon\left(t, \frac{\lambda}{N}\right) - {}_0R_n^\varepsilon\left(t, \frac{\lambda}{N}\right)\right| \leqslant \rho^\varepsilon\left(\frac{\lambda}{N}\right)\left(\frac{\lambda}{N}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_T \left|R_{n-k}^\varepsilon\left(u, \frac{\lambda}{N}\right) - {}_0R_{n-k}^\varepsilon\left(u, \frac{\lambda}{N}\right)\right| A_k^\varepsilon(t, du).$$

Итерируя это неравенство, имеем

$$\left|R_N^\varepsilon\left(t, \frac{\lambda}{N}\right) - {}_0R_N\left(t, \frac{\lambda}{N}\right)\right| \leqslant \rho^\varepsilon\left(\frac{\lambda}{N}\right)\frac{K\lambda^2}{N}, \tag{16}$$

что и завершает доказательство соотношения (14).

Наша дальнейшая задача состоит в доказательстве равенства

$$n_0 R_n\left(t, \frac{\lambda}{n}\right) = f(t)\frac{\lambda A(\varphi(\cdot))\, e^{-c/\mu}}{1-\frac{\lambda B}{2}\cdot\frac{e^{-c/\mu}-1}{c/\mu}}, \quad n\to\infty, \quad \varepsilon\to 0, \ n(1-\rho_\varepsilon)\to c, \tag{17}$$

при достаточно малых λ. Из (5) следует равенство

$$n_0 R_n^\varepsilon\left(t, \frac{\lambda}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} n^{1-k}\varphi_n^\varepsilon(t, k)\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Неравенства (11) и (15) показывают, что ряд в правой части сходится равномерно по n, ε, t при $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{\delta}{K}$. Поэтому для доказательства (17) достаточно установить, что

$$n^{1-k}\varphi_n^\varepsilon(t, k) = (-1)^k f(t)\left(A(\varphi(\cdot))\right)^k\left(\frac{B}{2}\right)^{k-1} e^{-c/\mu}\cdot k!\left(\frac{e^{-c/\mu}-1}{c/\mu}\right)^{k-1},$$

$$n\to\infty, \ \varepsilon\to 0, \ n(1-\rho^\varepsilon)\to c. \tag{18}$$

При $k=1$ мы уже доказали справедливость (18). Пусть равенство (18) выполняется при $k=2, 3, \ldots, m-1$. Тогда вследствие равномерной ограниченности выражения

$$n^{\frac{1}{m-2}}\sum_{r=1}^{m-1}\frac{m!}{r!\,(m-r)!}\int_T\int_T \varphi_{n-k}^\varepsilon(s, r)\,\varphi_{n-k}^\varepsilon(u, m-r)\,B_k^{\varepsilon,t}(du, ds)$$

имеем

$$n^{\frac{1}{m-2}}\sum_{r=1}^{m-1}\frac{m!}{r!\,(m-r)!}\sum_{s=1}^{n}\int_T\int_T \varphi_{n-k}^\varepsilon(s, r)\,\varphi_{n-k}^\varepsilon(u, m-r)\,B_k^{\varepsilon,t}(du, ds)\to$$

$$\to\sum_{r=1}^{m-1}\frac{m!}{r!\,(m-r)!}\int_T\int_T \varphi(s, r)\,\varphi(u, m-r)\,B(t, du, ds) = (-1)^{m-2} m!\,(m-1)!\times$$

$$\times\left(A(\varphi(\cdot))\right)^m\left(\frac{B}{2}\right)^{m-2} e^{-2c/\mu}\left(\frac{e^{c/\mu}-1}{c/\mu}\right)^{m-2}\int_T\int_T f(u)\,f(s)\,B(t, du, ds).$$

Применяя лемму 1 из [6], получаем

$$\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{k=1}^{n}\int_T\sum_{r=1}^{m-1}\frac{m!}{r!\,(m-r)!}\sum_{j=1}^{k}\int_T\int_T \varphi_{k-j}^\varepsilon(s, r)\,\varphi_{k-j}^\varepsilon(u, m-r)\,B_j^{\varepsilon,z}(du, ds)\times$$

$$\times\overline{H}_{n-k}^\varepsilon(t, dz) = \frac{e^{-c/\mu}\left(e^{-c/\mu}-1\right)^{m-1}}{(c/\mu)^{m-1}}\, m!\,(-1)^{m-1}\left(A(\varphi(\cdot))\right)^m\left(\frac{B}{2}\right)^{m-1},$$

$$n\to\infty, \ \varepsilon\to 0, \ n(1-\rho_\varepsilon)\to c.$$

Следовательно, формулу (17) можно считать установленной при $0\leqslant\lambda\leqslant\delta/k$. Для завершения доказательства осталось заметить, что из (17) и (14) следует (1). Теорема доказана.

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, *436*.
2. Шуренков В. М. Две предельные теоремы для критических ветвящихся процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, 3, *548—558*.
3. Чистяков В. П. О переходных явлениях в ветвящихся процессах.— Теория вероятностей и ее применения, 1974, 17, 4, *669—678*.

4. Нагаев С. В. Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем.— Сиб. мат. журн., 1974, 15, 2, *368—384*; 3, *570—579*.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. *752*.
6. Елейко Я. И. Переходные явления в теории многомерного восстановления с дискретным временем.— В кн.: Вероятностные методы бесконечномерного анализа. Киев, 1980, *47—60*.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
15.08.1980 г.