УДК 517.922

С. В. Исраилов

Операторная краевая задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве

Изучение задач с усложненными краевыми и функциональными условиями для конечных и бесконечных систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [1] приводит к мысли о постановке более общей краевой задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве, чем, например, хорошо изученная задача Коши [2—4] или другие многоточечные краевые задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение в банаховом пространстве B при $x \in [a, b]$

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1}$$

с операторным условием

$$\Phi y(x) = d, \quad x \in [a, b], \tag{2}$$

где $y(x)$ — искомая функция со значениями из B, $d \in B$.

Обозначим множество всех непрерывных при $x \in [a, b]$ функций со значениями в B через $C(B; [a, B])$. Оно является линейным пространством, и для нормы имеем

$$\| y \|_{C(B;[a,b])} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \| y(x) \|_B .$$

В этой норме пространство $C(B; [a, b])$ также является банаховым.

Пусть Φ — линейный ограниченный оператор, переводящий каждый элемент пространства $C(B; [a, b])$ в элемент пространства B такой, что линейный ограниченный оператор Φ_0 является сужением оператора Φ из $C(B; [a, b])$ в B, причем существует обратный ограниченный оператор Φ_0^{-1}.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по x и выполнены условия*

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leqslant l \| y_1 - y_2 \|, \quad y_1, y_2 \in B, \quad l \equiv \text{const}; \tag{3}$$

$$l(b-a)[1 + \| \Phi_0^{-1} \Phi \|] < 1. \tag{4}$$

Тогда операторная краевая задача (1), (2) *для любого заданного $d \in B$ имеет единственное решение $y(x) \in C(B; [a, b])$.*

Доказательство вытекает из того, что в пространстве $C(B; [a, b])$ краевая задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению

$$y(x) = Ay(x)$$

и оператор

$$Ay(x) = \Phi_0^{-1} d - \Phi_0^{-1} \Phi \int_a^x f(t, y(t))\, dt + \int_a^x f(t, y(t))\, dt \tag{5}$$

дает в силу условий (3) и (4) сжатое отображение пространства $C(B; [a, b])$ в себя.

Л е м м а 1. *Если непрерывно-дифференцируемая абстрактная функция $z(x)$ удовлетворяет операторному условию*

$$\Phi z(x) = \theta, \quad x \in [a, b], \quad \| \theta \| = 0, \tag{6}$$

то справедлива оценка

$$\| z \|_{C(B;[a,b])} \leqslant (b-a) \| \Phi_0^{-1} \Phi \| \, \| z' \|_{C(B;[a,b])}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливы равенства [5]

$$z(x) = z(\tau) + \int_\tau^x z'(t)\,dt, \quad \Phi z(x) = \Phi_0 z(\tau) + \Phi \int_\tau^x z'(t)\,dt = \theta,$$

$$\Phi_0^{-1}\Phi_0 z(\tau) + \Phi_0^{-1}\Phi \int_\tau^x z'(t)\,dt = \theta, \quad z(\tau) = -\Phi_0^{-1}\Phi \int_\tau^x z'(t)\,dt \tag{8}$$

для любого заданного $\tau \in [a, b]$. Так как τ произвольно, то из (8) вытекает (7).

В силу этой леммы условие (4) теоремы 1 можно заменить условием

$$\gamma = l(b-a) \| \Phi_0^{-1}\Phi \| < 1. \tag{9}$$

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по x и выполнены условия (3) и (9). Нетрудно проверить, что тогда решение $y(x)$ операторной краевой задачи (1), (2) может быть найдено последовательными приближенными

$$y_0 = \theta, \quad y_p(x) = \Phi_0^{-1} d - \Phi_0 \Phi \int_a^x f(t, y_{p-1}(t))\,dt + \int_a^x f(t, y_{p-1}(t))\,dt, \quad p = 1, 2, \ldots$$

и имеет место оценка

$$\| y(x) - y_p(x) \|_{C(B;[a,b])} \leqslant \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \{ \| \Phi_0^{-1} d \| + (b-a) \| \Phi_0^{-1}\Phi \| \cdot \| f(x, \theta) \| \}.$$

Обозначим через $\widetilde{B}(y_0, r)$, $y_0 = \Phi_0 d$, замкнутый шар пространства B радиуса r с центром в y_0 и через $\widetilde{C}(\widetilde{y}_0, r)$, $\widetilde{y}_0 \equiv y_0$ — соответствующий замкнутый шар в пространстве непрерывных функций $\widetilde{y} = y(x) \in C(B; [a, b])$ с нормой $\| \widetilde{y} \|_{[a,b]} = \max\limits_{x \in [a,b]} \| y(x) \|$.

Л е м м а 2. *Пусть $\varphi(x, y)$ — непрерывный оператор, определенный на $\widetilde{B}(y_0, r) \times [a, b]$ и удовлетворяющий условию*

$$\| \varphi(x, y) - \varphi(x, z) \| \leqslant K(x) \| y - z \|, \tag{10}$$

где $K(x)$ — суммируемая на $[a, b]$ функция. Тогда оператор

$$T\widetilde{y} = -\Phi_0^{-1}\Phi \int_a^x \varphi(t, y(t))\,dt + \int_a^x \varphi(t, y(t))\,dt \tag{11}$$

определен на шаре $\widetilde{C}(\widetilde{y}_0, z)$ и удовлетворяет на нем условию $\| T\widetilde{y} - T\overline{z} \| \leqslant [1 + \| \Phi_0^{-1}\Phi \|] K \| \widetilde{y} - \widetilde{z} \|$, где $K = \int_a^b K(t)\,dt$.

Л е м м а 3. *Пусть $\psi(x, y)$ — вполне непрерывный оператор, определенный на $\widetilde{B}(y_0, r) \times [a, b]$. Тогда оператор*

$$P\widetilde{y} = \Phi_0^{-1} d - \Phi_0^{-1}\Phi \int_a^x \psi(t, y(t))\,dt + \int_a^x \psi(t, y(t))\,dt \tag{12}$$

определен на шаре $\widetilde{C}(\widetilde{y}_0, r)$ и вполне непрерывен в $C(B; [a, b])$.

При доказательстве этих лемм использованы некоторые выводы из работы [4].

Т е о р е м а 2. *Пусть правая часть* $f(x, y)$ *дифференциального уравнения* (1) *представлена в виде* $f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)$, *где оператор* $\varphi(x, y)$ *удовлетворяет условию* (10), *а оператор* $\psi(x, y)$ *вполне непрерывен. Пусть выполняются неравенства*

$$\nu^* = [\,\| \Phi_0^{-1}\Phi \| + 1]\,K < 1, \quad (b-a)\,\nu^* K^{-1} [\,\|\varphi\| + \|\psi\|\,] \leqslant r. \tag{13}$$

Тогда существует по крайней мере одно решение уравнения (1), *определенное на сегменте* $[a, b]$ *и удовлетворяющее операторному условию* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению

$$y = \Phi_0^{-1} d - \Phi_0^{-1}\Phi \int_a^x \varphi(t, y)\,dt + \int_a^x \varphi(t, y)\,dt -$$

$$- \Phi_0^{-1}\Phi \int_a^x \psi(t, y)\,dt + \int_a^x \psi(t, y)\,dt. \tag{14}$$

Из (13), учитывая (11) и (12), имеем

$$y = Ty + Py. \tag{15}$$

В силу лемм 2, 3 и условий (13) операторы φ и ψ на $\widetilde{C}(\widetilde{y}, r)$ удовлетворяют всем условиям принципа неподвижной точки, сформулированного в работе [4]. Значит, задача (1), (2) имеет по крайней мере одно решение, определенное на $[a, b]$.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что функция* $f(x, y)$ *удовлетворяет условию*

$$\| f(x, y) - f(x, z) \| \leqslant L(\| y - z \|)\,\psi(x) \tag{16}$$

для любых элементов $y, z \in B$, *где функция* $L(t)$ *не убывает, имеет первообразную* $F(t)$, *функция* $\psi(x)$ *суммируема на* $[a, b]$, *неравенство*

$$F(\varphi(x)) - F(\| \Phi_0^{-1}\Phi \| \int_a^b L(\varphi(t))\,\psi(t)\,dt) \leqslant \int_a^x \psi(t)\,dt \tag{17}$$

справедливо только при $\varphi(x) \equiv 0$. *Тогда операторная краевая задача* (1), (2) *имеет не более одного решения* $y(x) \in C(B; [a, b])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют два различных решения $y(x), z(x) \in C(B; [a, b])$ задачи (1), (2). Тогда, используя условия теоремы, получаем неравенство

$$\| y(x) - z(x) \| \leqslant \| \Phi_0^{-1}\Phi \| \int_a^b L(\| y(t) - z(t) \|_B)\,\psi(t)\,dt +$$

$$+ \int_a^x L(\| y(t) - z(t) \|_B)\,\psi(t)\,dt. \tag{18}$$

Положим

$$v(x) = M + \int_a^x L(\varphi(t))\,\psi(t)\,dt, \tag{19}$$

где $\varphi(t) = \| y(t) - z(t) \|_B$, $M = \| \Phi_0^{-1}\Phi \| \int_a^b L(\varphi(t))\,\psi(t)\,dt$.

Из (18), (19) имеем $\varphi(x) \leqslant v(x)$,

$$v'(x) = L(\varphi(x))\,\psi(x) \leqslant L(v(x))\,\psi(x). \tag{20}$$

Тогда справедливо неравенство $v(x) \leqslant u(x)$, где $u(x)$ — решение задачи [6]

$$u'(x) = L(u(x))\,\psi(x), \quad u(a) = M. \tag{21}$$

Из (21), имея в виду $\varphi(x) \leqslant v(x) \leqslant u(x)$, получим неравенство

$$\int_M^{\varphi(x)} \frac{dt}{L(t)} \leqslant \int_a^x \psi(t)\, dt,$$

из которого и следует неравенство (17). Следовательно, $\varphi(x) \equiv 0$, т. е. $y(x) \equiv z(x)$. Теорема доказана.

Пример. В пространстве $C_m(a, b)$ m-мерных непрерывных вектор-функций $y(x) = (y_i(x))_{i=1}^m$ рассмотрим дифференциальное уравнение (m — конечное или бесконечное число)

$$dy/dx = f(x, y), \quad f(x, y) = (f_i(x, y))_{i=1}^m$$

с функциональным условием

$$\Phi(y) = \int_a^b dH(t)\, y(t) = d, \quad H(t) = (h_{ik}(t))_{i,k=1}^m, \quad d = (d_i)_{i=1}^m.$$

Здесь Φ — линейный ограниченный m-мерный функционал, переводящий элемент $y(x) \in C_m(a, b)$ в элемент R_m, R_m — пространство постоянных векторов m — измерений ($d \in R_m$ — заданный вектор), $H(t)$ — матрица ограниченной вариации на $[a, b]$.

Сужением Φ_0 оператора Φ из $C_m(a, b)$ в R_m, очевидно, будет матрица m-го порядка. Для существования Φ_0^{-1} достаточно, чтобы $\det \Phi_0 = \det \int_a^b dH(t) \neq 0$.

Аналогично изучаются операторные краевые задачи для дифференциального уравнения (1) в банаховом пространстве B и с нелинейными операторными условиями одного из видов

$$y(a) = \int_a^b F(t, y(t))\, dt, \quad \Phi y(x) = \int_a^b F(t, y(t))\, dt$$

при соответствующих ограничениях на нелинейный оператор $Fy = \int_a^b F(t, y(t))\, dt$, переводящий каждый элемент $y(t) \in \widetilde{C}(y, r)$ в элемент пространства B.

1. *Исраилов С. В., Танкиев И. А.* Функциональные задачи для счетной системы дифференциальных уравнений.— В кн.: Методы теории функций и функционального анализа. Грозный, 1976. *90—97*.
2. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Докл. АН СССР, 1955, 102, *13—16*.
3. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве.— В кн.: Тр. III Всесоюз. мат съезда М., 1957, 3, *73—80*.
4. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.— В кн.: Тр. семинара по функциональному анализу. Воронеж, 1956, 2, *3—23*
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. *544*.
6. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. *332*.

Грозненский
нефтяной институт

Поступила в редакцию
30.11.1981 г.