УДК 513.83

Р. С. Линичук, Г. М. Компанец

О полунепрерывных топологиях

Цель работы — изучение некоторых свойств полунепрерывных топологий на множестве $P(X)$ всех непустых подмножеств топологического пространства X. Следуя принятым обозначениям [1—7], полунепрерывную сверху топологию назовем $\varkappa$-топологией, а полунепрерывную снизу топологию — λ-топологией. Важность топологий заключается в том, то $\varkappa$-топология (λ-топология) полностью определяет полунепрерывность сверху (снизу) многозначных отображений топологических пространств.

В [2] исследованы свойства $\varkappa$-топологии на множестве $F(X)$ всех непустых замкнутых подмножеств топологического T_1-пространства X. Некоторые свойства λ-топологии на множестве $P(X)$ произвольного топологического пространства X изучены в [4—7].

По определению $\varkappa X = (P(X), \varkappa)$, $\lambda X = (P(X), \lambda)$, $\varkappa_F X = (F(X), \varkappa)$, $\lambda_F X = (F(X), \lambda)$.

Открытая база пространства $\varkappa X$ (открытая предбаза пространства λX) задается классами вида $\Delta_1(U) = \{(A) \in P(X) \mid A \subset U\}$ $(\Delta_2(U) = \{(A) \in P(X) \mid A \cap U \neq \varnothing\})$, когда U пробегает все возможные открытые в пространстве X множества. Здесь, как и в [2, 4], подмножество A пространства X, как точку множества $P(X)$, обозначим (A). Элементы баз пространств $\varkappa X$ и λX назовем соответственно базисными $\varkappa$-окрестностями и λ-окрестностями. При этом, как обычно [2], $O(A)$ — базисная $\varkappa$-окрестность точки $(A) \in \varkappa X$, порожденная открытой окрестностью OA множества A в пространстве X. Замыкание множества A в пространстве X обозначим $[A]_X$. Как принято в [2], точки множества $P(X)$ — одноточечные подмножества пространства X, назовем «малыми» точками; все остальные «большими», а точку $(X) \in P(X)$, порожденную всем пространством X,— «главной» точкой. Пространства подмножеств, следуя [3, 5], назовем гиперпространствами.

П р о с т р а н с т в о $\varkappa X$. Пусть X — произвольное топологическое пространство и $A_0 \subset X$. Легко установить, что $[(A_0)]_{\varkappa X} \supset \{(A) \in P(X) \mid A \supset A_0\}$. Если к тому же X — T_1-пространство, то имеем равенство $[(A_0)]_{\varkappa X} = \{(A) \in P(X) \mid A \supset A_0\}$. Таким образом, все точки пространства $\varkappa X$, за исключением главной его точки, незамкнутые как одноточечные подмножества этого пространства и, стало быть, пространство $\varkappa X$ (как и пространство $\varkappa_F X$, см. [2]) оказывается не T_1, за исключением тривиального случая, когда X состоит из одной точки. Кроме того, главная точка $(X) \in P(X)$ принадлежит замыканию любого непустого подмножества пространства $\varkappa X$. Как простое следствие отсюда получаем связность и бикомпактность пространства $\varkappa X$ для любого топологического пространства X. Заметим, что такими же свойствами обладает и пространство $\varkappa_F X$, являющееся, как легко видеть, подпространством пространства $\varkappa X$ (всюду плотным в случае T_1-пространства X). Ясно также, что исходное произвольное топологическое пространство X топологически вкладывается в пространство $\varkappa X$ всюду плотным образом. Как известно, пространство $\varkappa_F X$ — T_0-пространство для любого T_1-пространства X.

Из определения базы пространства $\varkappa X$ вытекает предложение.

П р е д л о ж е н и е 1. *Гиперпространство $\varkappa X$ не T_0-пространство тогда и только тогда, когда в X существует пара различных подмножеств A_1 и A_2 таких, что каждая окрестность OA_1 множества A_1 в пространстве X включает множество A_2. И наоборот: каждая окрестность OA_2 множества A_2 в пространстве X включает множество A_1.*

Относительно пространства $\varkappa X$ справедливо предложение.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пространство $\varkappa X$ — T_0-пространство тогда и только тогда, когда исходное пространство X T_1-пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\varkappa X$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_0. Предположим, что X не T_1-пространство. Тогда в пространстве X существует пара различных точек a_1 и a_2 таких, что любая окрестность Oa_1 точки a_1 содержит точку a_2. Подмножества $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_1, a_2\}$ пространства X характеризуются тем, что произвольная окрестность в пространстве X любого из них включает другое. В силу предложения 1, $\varkappa X$ не является T_0-пространством, что противоречиво.

Достаточность проводится аналогично доказательству свойства 2° из [2]. Предложение доказано.

Учитывая предложения 1 и 2, получаем новый критерий T_1-пространства.

Предложение 3. *Топологическое пространство X — T_1-пространство тогда и только тогда, когда для любой пары различных непустых подмножеств пространства X существует окрестность по крайней мере одного из них, не включающая другое множество.*

Нетрудно дать и прямое доказательство указанного критерия. Отметим также, что по отношению к пространствам $\varkappa X$ оказывается справедливым аналог теоремы из [2] по отношению к пространствам $\varkappa_F X$: если X и Y — T_1-пространства, тогда гомеоморфность их эквивалентна гомеоморфности пространств $\varkappa X$ и $\varkappa Y$.

Пространство λX. Как известно [4], пространство $\lambda_F X$, определенное для T_1-пространства X, всегда T_0-пространство (но никогда не T_1, за исключением тривиального случая, когда X состоит из одной точки). Картина существенно меняется, когда речь идет об объемлющем его пространстве λX. Так, различные точки пространства λX, которые как подмножества исходного пространства X имеют в нем одинаковые замыкания, обладают в пространстве λX одним и тем же фильтром окрестностей и поэтому не отделимы (по Колмогорову) в λX. Следующий результат полностью решает вопрос об аксиомах отделимости пространства λX.

Предложение 4. *Гиперпространство λX является T_0-пространством тогда и только тогда, когда исходное пространство X дискретно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть λX — T_0-пространство. Предположим, что X недискретно. Тогда в X есть подмножество A, не замкнутое в этом пространстве. Значит, множество $B = [A]_X$ не совпадает с A.

Покажем, что точки $(A), (B) \in \lambda X$ неотделимы (по Колмогорову) в пространстве λX. Для этого достаточно показать, что произвольная базисная λ-окрестность какой-нибудь любой из этих точек в то же время базисная λ-окрестность и другой точки. Но это действительно так, поскольку для любой конечной открытой в пространстве X системы $\gamma = \{U_1, \ldots, U_s\}$ соотношение $U_i \cap A \neq \varnothing$ равносильно тому, что $U_i \cap B \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, s$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Достаточность. Пусть X дискретно и $(A), (B)$ — произвольная пара различных точек пространства λX. Поскольку $A \neq B$, то существует точка одного из этих множеств, не принадлежащая другому; пусть, например, существует точка a множества A, не принадлежащая множеству B. Ясно, что тогда базисная λ-окрестность $\Delta_2(X \setminus B)$ точки $(A) \in \lambda X$, порожденная открытым в X множеством $X \setminus B$, не содержит точку $(B) \in \lambda X$. Пространство λX, таким образом, оказывается T_0-пространством. Предложение доказано.

1. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966, 1, *594*.
2. *Пономарев В. И.* Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов. — Мат. сб., 1959, 48, 2, *191—212*.
3. *Michael E.* Topologies on spaces of subsets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 71, 1, *152—182*.
4. *Линичук Р. С.* Многозначные отображения и непрерывность разбиений топологических пространств.— В кн.: Десятая мат. школа. Киев, 1974, *308—329*.
5. *Линичук Р. С.* О спектральном представлении λ-гиперпространств.— Докл. АН УССР, 1978, 10, *883—885*.
6. *Линичук Р. С.* О размерности гиперпространств.— Укр. мат. журн., 1978, 30, 3, *378—381*.
7. *Feichtinger O.* Properties of the λ-topology.— Lect. Notes Math., 1970, 171, *17—23*.

Ворошиловградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
13.10.1980 г.