УДК 517.956

В. А. Маловичко

О краевых задачах для одного класса эллиптико-параболических систем

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с кусочно-гладкой границей Γ. В области Ω рассмотрим систему

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} [A^{ij}(x)\, u_{x_i}]_{x_j} - A(x)\, u = f(x), \tag{1}$$

где $u(x) = (u^{(1)}(x), u^{(2)}(x))$, $f(x) = (f^{(1)}(x), f^{(2)}(x))$,

$$A^{ij}(x) = \begin{pmatrix} a^{ij}(x) & k(x)\, b^{ij}(x) \\ k(x)\, b^{ij}(x) & c^{ij}(x) \end{pmatrix}, \qquad A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix},$$

причем для всех точек $x \in \Omega$ и любого вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ выполняются соотношения

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \qquad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad c^{ij}(x) = c^{ji}(x),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) - |k(x)| \cdot b^{ij}(x))\, \xi_i \xi_j \geqslant 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} (c^{ij}(x) - |k(x)| \cdot b^{ij}(x))\, \xi_i \xi_j \geqslant 0,$$

$$a(x)\, \xi_1^2 + 2b(x)\, \xi_1 \xi_2 + c(x)\, \xi_2^2 \geqslant \alpha (\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Отметим, что система (1) принадлежит классу эллиптико-параболических систем [1—3]. В настоящей работе изучается разрешимость краевой задачи для системы (1) с краевыми условиями первого и второго рода.

Относительно гладкости коэффициентов системы (1) предполагается что $k(x)$, $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $c^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$; $a(x)$, $b(x)$, $c(x) \in C(\overline{\Omega})$.

Пусть $(l_1(x), \ldots, l_n(x))$ — вектор единичной внешней нормали к границе Γ в точке $x \in \Gamma$. Положим

$$\Gamma_1 = \left\{ x \in \Gamma : \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, l_i(x)\, l_j(x) > 0 \right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{ x \in \Gamma : k(x) \neq 0, \right.$$

$$\left. \sum_{i,j=1} b^{ij}(x)\, l_i(x)\, l_j(x) > 0 \right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{ x \in \Gamma : \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij}(x)\, l_i(x)\, l_j(x) > 0 \right\}, \qquad \Gamma_4 = \Gamma_1 \diagdown \Gamma_2, \qquad \Gamma_5 = \Gamma_3 \diagdown \Gamma_2,$$

$\Gamma_4^{(1)}, \Gamma_4^{(2)}$ — такие непересекающиеся множества, что $\Gamma_4 = \Gamma_4^{(1)} \cup \Gamma_4^{(2)}$; $\Gamma_5^{(1)}, \Gamma_5^{(2)}$ — такие непересекающиеся множества, что $\Gamma_5 = \Gamma_5^{(1)} \cup \Gamma_5^{(2)}$.

Краевая задача. Найти решение системы (1) в области Ω такое, что

$$u^{(1)} |_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4^{(1)}} = 0, \qquad u^{(2)} |_{\Gamma_2 \cup \Gamma_5^{(1)}} = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u^{(1)}_{x_i} l_j |_{\Gamma_4^{(2)}} = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij} u^{(2)}_{x_i} l_j |_{\Gamma_5^{(2)}} = 0. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения: V — множество вектор-функций $u(x)$ таких, что функции $u^{(1)}(x)$, $u^{(2)}(x)$ принадлежат пространству $C^2(\overline{\Omega})$ и удовлетворяют условиям (2), (3); W — множество вектор-функций $\mathbf{u}(x)$ таких, что функции $u^{(1)}(x)$, $u^{(2)}(x)$ принадлежат пространству $C^1(\overline{\Omega})$ и удовлетворяют условиям (2); $(\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x))$ — скалярное произведение вектор-функций $\mathbf{u}(x)$ и $\mathbf{v}(x)$; H — гильбертово пространство, полученное замыканием множества W по норме

$$\|\mathbf{u}\|_H^2 = \int_\Omega \left[(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \sum_{i,j=1}^n (A^{ij}\mathbf{u}_{x_i}, \mathbf{u}_{x_j})\right] dx. \tag{4}$$

Для вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{v}(x) \in W$ рассмотрим билинейную форму

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n (A^{ij}\mathbf{u}_{x_i}, \mathbf{v}_{x_j}) + (A\mathbf{u}, \mathbf{v})\right] dx. \tag{5}$$

Легко показать, что

$$|B(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqslant M \left\{\int_\Omega \left[(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_{x_i}, \mathbf{v}_{x_i}\right] dx\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{u}\|_H, \tag{6}$$

где M — некоторая положительная постоянная, зависящая лишь от коэффициентов системы (1). Из (6) следует, что при фиксированной вектор-функции $\mathbf{v}(x) \in W$ билинейную форму $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал относительно $\mathbf{u}(x)$, определенный в H.

Условимся, что вектор-функция $\mathbf{u}(x)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, если $u^{(1)}(x)$, $\mathbf{u}^{(2)}(x) \in L_2(\Omega)$.

Определение 1. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega)$. *Вектор-функцию* $\mathbf{u}(x) \in H$ *назовем обобщенным решением задачи* (1) — (3) *из пространства* H, *если для всех вектор-функций* $\mathbf{v}(x) \in W$ *выполняется равенство*

$$\int_\Omega (\mathbf{v}, \mathbf{f})\, dx = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{7}$$

Теорема 1. *Для любой вектор-функции* $\mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega)$ *существует обобщенное решение задачи* (1)—(3) *из пространства* H.

Доказательство. Так как при фиксированной вектор-функции $\mathbf{v}(x) \in W$ билинейная форма $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ является линейным ограниченным функционалом в H относительно $\mathbf{u}(x)$, то по теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle$, где T — линейный оператор, определенный на W, область значений которого лежит в H; $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ — скалярное произведение, соответствующее норме (4).

Так как

$$|B(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geqslant K\|\mathbf{v}\|_H^2, \quad K = \text{const} > 0,$$

то

$$K\|\mathbf{v}\|_H^2 \leqslant |B(\mathbf{v}, \mathbf{v})| = |\langle \mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\|_H \|T\mathbf{v}\|_H \tag{8}$$

и, следовательно,

$$K\|\mathbf{v}\|_H \leqslant \|T\mathbf{v}\|_H \tag{9}$$

Из (9) следует, что отображение W в H, определяемое оператором T, взаимно-однозначно. Обозначим через $\widetilde{H}$ замыкание множества $T\mathbf{v}(x)$ по норме (4), где $\mathbf{v}(x) \in W$.

Поскольку

$$\left|\int_\Omega (\mathbf{v}, \mathbf{f})\, dx\right| \leqslant \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\mathbf{v}\|_H \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{K}\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \|T\mathbf{v}\|_H,$$

где $\|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_\Omega (\mathbf{v}, \mathbf{v})\, dx$, то интеграл $\int_\Omega (\mathbf{v}, \mathbf{f})\, dx$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал над $\widetilde{H}$. Поэтому согласно теореме

Рисса существует такая вектор-функция $\mathbf{u}(x) \in \widetilde{H}$, что

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}, \mathbf{f})\, dx = \langle \mathbf{u}, T\mathbf{v} \rangle = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}(x) \in W,$$

т. е. $\mathbf{u}(x)$ обобщенное решение задачи (1) — (3) из пространства H. Теорема доказана.

Определение 2. *Пусть* $\mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega)$. *Вектор-функцию* $u(x) \in L_2(\Omega)$ *будем называть обобщенным решением задачи* (1) — (3) *из пространства* $L_2(\Omega)$, *если для каждой вектор-функции* $\mathbf{v}(x) \in V$ *выполняется равенство*

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}, f)\, dx = \int_{\Omega} (\mathbf{u}, L\mathbf{v})\, dx. \tag{10}$$

Теорема 2. *Для любой вектор-функции* $\mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega)$ *обобщенное решение* $\mathbf{u}(x)$ *задачи* (1)—(3) *из пространства* H *(в смысле равенства* (7)) *является также обобщенным решением этой задачи из пространства* $L_2(\Omega)$ *(в смысле равенства* (10)).

Доказательство. Если вектор-функция $\mathbf{u}(x) \in H$ удовлетворяет равенству (7), то существует последовательность $\mathbf{u}_k(x) \in W$, *сходящаяся к* $\mathbf{u}(x)$ *по норме* (4), *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} B(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{11}$$

Для любой вектор-функции $\mathbf{v}(x) \in V$ форму $B(\mathbf{u}_k, \mathbf{v})$ интегрированием по частям можно преобразовать так, что

$$B(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u}_k, L\mathbf{v})\, dx. \tag{12}$$

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_k, L\mathbf{v})\, dx = \int_{\Omega} (\mathbf{u}, L\mathbf{v})\, dx, \tag{13}$$

то из (7), (11)—(13) следует равенство (10). Последнее означает, что $\mathbf{u}(x)$ есть обобщенное решение задачи (1)—(3) из пространства $L_2(\Omega)$. Теорема доказана.

Пусть $\mathbf{u}(x) \in V$. Тогда из (11)—(13) следует равенство

$$\int_{\Omega} (L\mathbf{u}, \mathbf{u})\, dx = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Так как в силу (8)

$$|B(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geqslant K \|\mathbf{u}\|_H^2, \text{ то}$$

$$\|L\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \geqslant \left| \int_{\Omega} (L\mathbf{u}, \mathbf{u})\, dx \right| \geqslant K \|\mathbf{u}\|_H^2$$

и, следовательно,

$$\|L\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \geqslant K \|\mathbf{u}\|_H, \quad \mathbf{u}(x) \in V. \tag{14}$$

Из энергетического неравенства (14) следует

Теорема 3. *Если существует регулярное решение* $\mathbf{u}(x) \in V$ *задачи* (1)—(3), *то оно единственно и непрерывно зависит от* $\mathbf{f}(x)$.

1. *Dufner J.* On the solvability of boundary value problems for elliptic-parabolic systems of second order.—Atti Accad naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1974. 57, 3—4, *147—155*
2. *Dufner J.* Randertprobleme für Systeme linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordung von elliptisch-parabolichen Typ.— Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl Sc. fis., mat. e natur. Ser. 8, 1972, 11, 2, *17—60*
3. *Маловичко В. А* О разрешимости краевых задач для одного класса эллиптико-параболических систем.— Докл. АН УССР. Сер А, 1980, *4*, *18—21*.
4. *Олейник О. А., Радкевич Е. В* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.— В кн.: Математический анализ. М.: Наука. 1971 *7—252*

Киевский технологический институт
пищевой промышленности

Поступила в редакцию
13.10.1980 г.