УДК 513.88

Я. В. Микитюк

О дифференциальных операторах на оси с краевым условием в нуле

Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство, Ω — открытое множество в $\mathbf{R}$. Обозначим через $W_2^n(\Omega)$ пространство Соболева порядка n, $n\in\mathbf{N}$, элементами которого являются функции $f:\Omega\to E$ (см. например, [1]). В работе рассматривается оператор T в пространстве $H\overset{\mathrm{def}}{=}L_2(\mathbf{R};E)$, определяемый дифференциальным выражением

$$lf(x)=(-i)^n f^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{k=n-2}p_k(x)f^{(k)}(x),\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{0\},\tag{1}$$

и краевым условием

$$Ff=0,\quad f\in W_2^n(R\setminus\{0\})^*,\tag{2}$$

где $F\in\mathcal{B}(W_2^n(\mathbf{R}\setminus\{0\});E^n)^{**}$ $(E^n=\underbrace{E\times\ldots\times E}_{n})$. Оператор F, фигурирующий в (2), будем называть краевым. Относительно коэффициентов p_k, которые в общем случае являются оператор-функциями со значениями в $\mathcal{B}(E)$, предполагаем, что они непрерывны и $\sup\limits_k\sup\limits_x(\|p_k(x)\|(1+x^2))<\infty$.

В работе получена асимптотическая оценка ядра резольвенты оператора T для класса краевых операторов, которые будем называть регулярными. Полученные результаты напоминают соответствующие результаты для дифференциального оператора на отрезке (см. [2]).

1. Регулярный краевой оператор. Предположим, что краевой оператор F удовлетворяет условиям: 1) $Z(F)\supset\bigcap\limits_{j<n}(Z(P_j^+)\cap Z(P_j^-))^{***}$; 2) $R(F)=E^n$, где операторы P_j^+, P_j^-, $j=0,\ldots,n-1$, принадлежат $\mathcal{B}(W_2^n(\mathbf{R}\setminus\{0\});E)$ и действуют по формуле $P_j^\pm f=f^{(j)}(\pm 0)$.

Положим $G_m=FN_m$, где $N_m=\bigcap\limits_{j<m}(Z(P_j^+)\cap Z(P_j^-))$, $m=1,\ldots,n$, и определим числа k_ν, полагая $k_0=n$, $k_\nu=\max\{j:j<k_{\nu-1},\ G_j\neq G_{k_{\nu-1}}\}$, $\nu=0,\ldots,r$, $r\leqslant n$. Поскольку оператор F непрерывен и сюрьективен,

* Мы считаем, что $W_2{}^n(\mathbf{R}\setminus\{0\})$ естественным образом вложено в H.

** Через $B(X;Y)$ $(B(X)$, где X, Y — нормированные пространства, обозначаем пространство всех линейных, непрерывных операторов из X в Y (X).

*** $D(\cdot)$, $R(\cdot)$, $Z(\cdot)$ обозначает соответственно область определения, область значений, многообразие нулей оператора $(\cdot)$.

то в силу теоремы об открытом отображении, подпространства $M_\nu = G_{k_\nu}$ замкнуты. Обозначим через $\mathcal{P}_\nu$ оператор ортогонального проектирования на подпространство $M_\nu \ominus M_{\nu-1}$. Легко видеть, что $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_r$ попарно ортогональны и $\mathcal{P}_1 + \ldots + \mathcal{P}_r = I_{E^n}$.

В силу условия 2) оператор F однозначно представим в виде

$$F = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} (F_j^+ P_j^+ + F_j^- P_j^-), \tag{3}$$

где $F_j^\pm \in \mathcal{B}(E; E^n)$, $j = 0, \ldots, n-1$. Положим $\alpha_{\nu j} = \mathcal{P}_\nu F_j^+$, $\beta_{\nu j} = \mathcal{P}_\nu F_j^-$. Легко проверить, что $\alpha_{\nu j} = \beta_{\nu j} = 0$ при $j > k_\nu$. Операторы $\alpha_\nu \overset{\text{def}}{=} \alpha_{\nu k_\nu}$, $\beta_\nu \overset{\text{def}}{=} \beta_{\nu k_\nu}$ назовем старшими коэффициентами краевого оператора F. Пусть $\Pi^\pm \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbf{C} : 0 < \pm \arg z < \pi/n\}$. Определим операторы $\Gamma_+, \Gamma_- \in \mathcal{B}(E^n)$, полагая

$$\Gamma_\pm = \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \left(\sum_{\operatorname{Im} a_p \rho_0 > 0} a_p^{k_\nu} \alpha_\nu \mathcal{E}_p - \sum_{\operatorname{Im} a_p \rho_0 < 0} a_p^{k_\nu} \beta_\nu \mathcal{E}_p \right), \tag{4}$$

где $a_p = \exp(2\pi i p/n)$, $p = 0, \ldots, n-1$, и $\rho_0 \in \Pi^+$ $(\rho_0 \in \Pi^-)$ в случае Γ_+ (Γ_-). Операторы $\mathcal{E}_p$, $p = 0, \ldots, n-1.$, принадлежат $\mathcal{B}(E^n; E)$ и действуют по формуле $\mathcal{E}_p c = c_p$, $c = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in E^n$.

Определение. Краевой оператор F будем называть регулярным, если он удовлетворяет условиям 1), 2) и операторы Γ_+, Γ_-, определяемые формулой (4), обратимы в $\mathcal{B}(E^n)$.

2. Резольвента оператора T. Основным результатом является теорема.

Теорема. *Пусть F — регулярный краевой оператор. Тогда в области $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \neq 0\}$ ядро оператора $(T - \zeta)^{-1}$ допускает оценку*

$$\sup_{x, y \in \mathbf{R}} \| T(x, y, \zeta) \| = O(|\zeta|^{-(n-1)/n}), \quad |\zeta| \to \infty. \tag{5}$$

Докажем некоторые вспомогательные утверждения. Обозначим через L_1 оператор в пространстве H, определяемый формулой $L_1 f = (-i)^n f^{(n)}$, $f \in D(L_1) \overset{\text{def}}{=} W_2^n(\mathbf{R} \setminus \{0\})$, а через L, L_F — сужения оператора L_1 на $D(L) \overset{\text{def}}{=} W_2^n(\mathbf{R})$, $D(L_F) \overset{\text{def}}{=} Z(F)$ соответственно.

Положим

$$e_p(x, \rho) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \operatorname{sgn} x \cdot \exp(i a_p \rho x) & \text{при } \operatorname{Im} a_p \rho x > 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Im} a_p \rho x < 0, \end{cases}$$

где $\rho \in \Pi^+ \cup \Pi^-$. Введем оператор-функцию $\zeta \to V(\zeta)$, принимающую значения в $\mathcal{B}(E^n; W_2^n(\mathbf{R} \setminus \{0\}))$, полагая

$$V(\zeta) c = \sum_{k=0}^{k=n-1} e_k(\cdot, \rho) c_k, \quad c = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in E^n, \tag{6}$$

где $\zeta = \rho^n$, $\rho \in \Pi^+ \cup \Pi^-$. Легко проверить, что

$$D(L_1) = D(L) \dot{+} R(V(\zeta)). \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть оператор $FV(\zeta)$, где F — краевой оператор, обратим в $\mathcal{B}(E^n)$. Тогда точка ζ будет принадлежать резольвентному множеству оператора L_F и*

$$(L_F - \zeta)^{-1} = (L - \zeta)^{-1} - V(\zeta) [FV(\zeta)]^{-1} F (L - \zeta)^{-1}. \tag{8}$$

Доказательство леммы получается путем непосредственной проверки с учетом равенства (7).

Лемма 2. *Пусть F — регулярный краевой оператор. Тогда будет существовать такое $\eta > 0$, что для всех $\rho \in \Pi_\eta \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in \Pi^+ \cup \Pi^- : |\zeta| > \eta\}$ оператор $FV(\rho^n)$ будет обратимым в $\mathcal{B}(E^n)$ и*

$$[FV(\rho^n)]^{-1} F(L - \rho^n)^{-1} = R(\rho) V(\bar{\rho}^n)^*, \tag{9}$$

где оператор-функция $\rho \to R(\rho) \in \mathcal{B}(E^n)$ голоморфна в Π_η и

$$\| R(\rho) \| = O(\rho^{-n+1}), \quad \rho \in \Pi_\eta, \quad |\rho| \to \infty.$$

Доказательство. Делая несложные вычисления, получаем

$$FV(\rho^n) = \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=r} (i\rho)^{k_\nu} \mathcal{P}_\nu \right) (\Gamma_\pm + C(\rho)), \quad \rho \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \tag{10}$$

где знак $+$ ($-$) соответствует $\rho \in \Pi^+$ ($\rho \in \Pi^-$), а оператор-функция $\rho \to C(\rho) \in \mathcal{B}(E^n)$ голоморфна в $\Pi^+ \cup \Pi^-$ и $\| C(\rho) \| = O(\rho^{-1})$, $\rho \in \Pi^+ \cup \Pi^-$, $\rho \to \infty$. Из (10) вытекает, что при достаточно больших ρ оператор $FV(\rho^n)$ обратим в $\mathcal{B}(E^n)$ и

$$[FV(\rho^n)]^{-1} = (\Gamma_\pm^{-1} + C_1(\rho)) \left(\sum_{\nu=1}^{\nu=r} (i\rho)^{-k_\nu} \mathcal{P}_\nu \right), \tag{11}$$

где оператор-функция $\rho \to C_1(\rho) \in \mathcal{B}(E^n)$ голоморфна в Π_η при некотором $\eta > 0$ и $\| C_1(\rho) \| = O(\rho^{-1})$, $\rho \in \Pi_\eta$, $|\rho| \to \infty$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что ядро оператора $(L - \rho^n)^{-1}$ имеет вид

$$L(x, y, \rho^n) = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{i a_p}{n \rho^{n-1}} e_p(x - y, \rho).$$

Учитывая это, получаем

$$F(L - \rho^n)^{-1} = M(\rho) V(\bar{\rho}^n)^*, \tag{12}$$

где

$$M(\rho) = \sum_{j=0}^{j=n-1} \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(i a_p \rho)^{j+1}}{n \rho^n} (F_j^+ + F_j^-) \mathcal{E}_p.$$

Отсюда, принимая во внимание (11) и свойства операторов $\mathcal{P}_\nu$, получаем требуемый результат. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть операторы $A, B : H \to H$ заданы формулами

$$Af(x) = (1 + x^2)^{-1/2} f(x), \quad D(A) \overset{\text{def}}{=} H,$$

$$Bf(x) = \sum_{k=0}^{k=n-2} (1 + x^2)^{1/2} p_k(x) f^{(k)}(x), \quad D(B) \overset{\text{def}}{=} D(L_1).$$

Легко видеть, что $T = L_F + AB$. Для всех $\rho \in \Pi^+ \cup \Pi^-$ таких, что точка $\zeta = \rho^n$ принадлежит резольвентному множеству оператора L_F, положим $N(\rho) = I + B(L_F - \rho^n)^{-1} A$. Используя соотношения (8), (9), получаем $\| N(\rho) - I \| = O(\rho^{-1})$, $\rho \in \Pi^+ \cup \Pi^-$, $|\rho| \to \infty$. Отсюда вытекает, что при достаточно больших ρ оператор $N(\rho)$ обратим в $\mathcal{B}(H)$ и

$$\| N(\rho)^{-1} - I \| = O(\rho^{-1}), \quad \rho \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \quad |\rho| \to \infty. \tag{13}$$

Аналогично [3], можно доказать следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть для некоторого* $\rho \in \Pi^+ \cup \Pi^-$ *оператор* $N(\rho)$ *обратим в* $\mathcal{B}(H)$. *Тогда точка* $\zeta = \rho^n$ *принадлежит резольвентному множеству оператора* T *и*

$$(T - \rho^n)^{-1} = (L_F - \rho^n)^{-1} - (L_F - \rho^n)^{-1} AN(\rho)^{-1} B (L_F - \rho^n)^{-1}. \tag{14}$$

Принимая во внимание соотношения (8), (9), (13), (14), с помощью несложных, но громоздких вычислений, получаем оценку (5). Теорема доказана.

1. Л и о н с Ж.-Л., М а д ж е н е с Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. *372*.
2. Н а й м а р к М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. *528*.
3. Л я н ц е В. Э. Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра.— Мат. сб., 1970, 82, 1, *126—156*.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию 23.06.1980 г.
после переработки 6.01.1981 г.