УДК 517.925.6

В. Д. Мохонько

О мероморфных решениях одного класса функциональных уравнений

Используем стандартные обозначения теории мероморфных функций [1]. Скажем, что $f(z) \in M_\infty$, если f — мероморфная в $\mathbf{C}$ функция. В [2] приведены априорные оценки роста решений уравнения

$$Q(z, f(g(z))) = R(z, f(z)); \qquad g(z) = mz + b; \qquad |m| > 1, \tag{1}$$

$Q(z, w)$, $R(z, w)$ — рациональные функции по w и мероморфные по z в $\mathbf{C}$.

Рассмотрим уравнение

$$Q(z, f(g(z))) = R(z, f(p(z))), \tag{2}$$

$Q(z, w)$, $R(z, w)$ — рациональные функции по w и мероморфные по z в $\mathbf{C}$; $g(z) = c_0 z^q + \ldots + c_{q-1} z + c_q$; $p(z) = b_0 z^p + \ldots + b_p$; $c_i, b_j = \text{const}$. Не уменьшая общности, можно считать $q \geqslant p$. Положим $n = q/p \geqslant 1$, $t = \deg_w Q(z, w)$, $s = \deg_w R(z, w)$, $\varkappa = s/t$; $|c_0| = \mu$, $|b_0| = \nu$. Если $q = p$, $(n = 1)$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $\mu \geqslant \nu$. Положим $\sigma = \mu/\nu \geqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть $f \in M_\infty$ — решение (2) и для всех коэффициентов $a(z)$ уравнения (2) выполняется $T(r, a) = o(T(r, f))$. Если $n > 1$, $\varkappa \geqslant n$, то $\ln T(r, f) \sim \ln \varkappa \ln \ln r / \ln n$, если $n = 1$, $\sigma > 1$, то при $\varkappa = 1$, f имеет нулевой порядок, а при $\varkappa > 1$, $\ln T(r, f) \sim \ln \varkappa \ln r / \ln \sigma$.*

Замечание. Теорема 3 из [2] — частный случай теоремы 1 при $q = p = 1$. Если в (2) $q = p = 1$, предполагаем, что $\max(\mu, \nu) > 1$. В [3] изучались мероморфные решения уравнения $f(az+b) = R(z, f(z))$, a, $b = \text{const}$, $|a| > 1$, $R(z, w)$ — рациональная функция по w и z. Это уравнение — частный случай (2). Действительно, здесь $p(z) = z$, $g(z) = az + b$, $q = p = 1$, $n = 1$, $\mu = |a| > 1$, $\nu = 1$, $\sigma = |a| > 1$. В [4] изучались мероморфные решения уравнения $b(z) \cdot f(p(z)) = R(f(z)) + h(z)$, $R(w)$ — рациональная функция (с коэффициентами — константами), $b(z)$, $h(z)$, $f(z) \in M_\infty$; $p(z)$ — многочлен. Это уравнение также частный случай (2). Применение теоремы A [5] позволяет получить априорные оценки роста решений более широкого класса уравнений. Если в (2) $p = q$, $\nu = \mu$, то в общем случае никаких оценок роста решений (2) через коэффициенты получить нельзя: любая нечетная функция удовлетворяет уравнение $f(-z)=-f(z)$. Существуют простые функции, удовлетворяющие уравнению вида (2): $f(w)=\exp w$ — решение уравнения $f(2z^2+1)=e\cdot f^2(z^2)$. Если в теореме 1 $n\geqslant 1$, $\varkappa<n$, то для всех $f\in M_\infty$ — решений (2), найдется коэффициент $a(z)$ уравнения, что $T(r, a)\neq o(T(r, f))$. Пусть $T(r, a)=\Sigma T(r, a_i)$ — сумма характеристик всех коэффициентов $a_i(z)$ уравнения (2).

Теорема 2. *Пусть $f\in M_\infty$ — решение (2), такое, что* $T(r, a)=O(T(r, f))$. *Если* $n>1$, *то* $\ln T(r, f)<A\ln\ln r$; *если* $n=1$, $\sigma=\mu/\nu>1$, *то* $\ln T(r, f)<A\ln r$, *где* $A=\mathrm{const}>0$.

Если не накладывать никаких ограничений на рост решений, верна

Теорема 3. *Пусть $f\in M_\infty$ — решение* (2). *Если* $n\neq 1$, $\ln\varkappa/\ln n=\tau$, *то*

$$T(r, f)<\begin{cases} c(\ln r)^\tau\cdot T(r, a), & \tau>0, \\ c\ln\ln r\cdot T(r, a), & \tau=0, \\ cT(r, a), & \tau<0, \quad c=\mathrm{const}, \end{cases} \tag{3}$$

если $n=1$, $\ln\varkappa/\ln\sigma=s$, *то*

$$T(r, f)<\begin{cases} cr^sT(r, a), & s>0, \\ c\ln rT(r, a), & s=0, \\ cT(r, a), & s<0, \end{cases} \tag{4}$$

т. е., рост решений (2) не может «сильно» превышать рост коэффициентов.

Теорема А. *Пусть $F=P_1/P_2$, где $P_1=a_{01}f^t+\ldots+a_{t1}$; $P_2=a_{02}f^m+\ldots+a_{m2}$; $a_{ij}(z), f(z)\in M_\infty$, $\deg_f F=d$, причем P_1, P_2 взаимно просты как многочлены от f над полем M_∞. Тогда $T(r, F)=dT(r, f)+O(\Sigma T(r, a_{ij}))$* [5].

Получим несколько вспомогательных соотношений. Из определения $g(z)$, $p(z)$ следует ($r=|z|>r(\varepsilon')$, $0<\varepsilon'<\min(\mu, \nu)$)

$$\mu_2r^q=(\mu-\varepsilon')r^q<|g(z)|<(\mu+\varepsilon')r^q=\mu_1r^q,$$
$$\nu_2r^p=(\nu-\varepsilon')r^p<|p(z)|<(\nu+\varepsilon')r^p=\nu_1r^p. \tag{5}$$

Пусть $\rho_0>\rho_*>0$; $\omega>0$, k — целое. Если ρ_* достаточно велико, то $\omega^{n^{k-1}+n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^k}\nearrow$ при $k\nearrow$. Если

$$\omega^{n^{k-1}+\ldots+1}\rho_0^{n^k}\geqslant\rho\geqslant\omega^{n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-1}}, \tag{6}$$

то

$$\frac{n^k-1}{n-1}\ln\omega+n^k\ln\rho_0\geqslant\ln\rho\geqslant\frac{n^{k-1}-1}{n-1}\ln\omega+n^{k-1}\ln\rho_0. \tag{7}$$

Делая во втором из неравенств (7) простое преобразование, получим ($c_1>0$ $\rho_0>\rho_*$; c_1, ρ_* — абсолютные константы)

$$k<\ln\left[\ln(\omega^{1/(n-1)}\rho)\left(\frac{\ln\omega}{n(n-1)}+\frac{\ln\rho_0}{n}\right)^{-1}\right]\cdot(\ln n)^{-1}<\ln(c_1\ln\rho)\cdot(\ln n)^{-1}. \tag{8}$$

Аналогично из первого неравенства (7) следует ($c_2>0$ — абсолютная константа) $k>\ln(c_2\ln\rho)(\ln n)^{-1}$. Поэтому, если ρ удовлетворяет (6), то для всякого $\varkappa>0$ выполняется ($\rho>\rho_*$)

$$(c_2\ln\rho)^{(\ln\varkappa)/\ln n}\leqslant\varkappa^k\leqslant(c_1\ln\rho)^{(\ln\varkappa)/\ln n}, \tag{9}$$

(если $0<\varkappa<1$, то неравенства меняются на противоположные).

Применим к (2) теорему А: $tT(r, f(g))=sT(r, f(p))+O(T(r, a))$ или

$$T(r, f(g))=\varkappa T(r, f(p))+O(T(r, a)) \tag{10}$$

Доказательство теоремы. 1. Положим $\varkappa_1 = \varkappa - \varepsilon$, $\varkappa_2 = \varkappa + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Так как $T(r, f) \nearrow \infty$, $T(r, a) = o(T(r, f))$, то из (5), (10) следует

$$T(\mu_1 r^q, f) > \varkappa_1 T(\nu_2 r^p, f); \qquad T(\mu_2 r^q, f) < \varkappa_2 T(\nu_1 r^p, f). \tag{11}$$

Положим $\nu_1 r^p = \rho$. Тогда $\mu_2 r^q = \omega \rho^n$; $(n = q/p, \quad \omega = \mu_2/\nu_1^n)$. Обозначим $T(r, f) = T(r)$. Пусть $q > p$. Из (11) получим

$$T(\omega\rho^n) < \varkappa_2 T(\rho). \tag{12}$$

Если $\rho = \rho_0 > \rho_*$, то $\omega^{n^{k-1}+\ldots+n+1}\rho_0^{n^k} = \omega(\omega^{n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-1}})^n$ и из (12) следует

$$T(\omega^{n^{k-1}+\ldots+1}\rho_0^{n^k}) < \varkappa_2 T(\omega^{n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-1}}) < \ldots < \varkappa_2^k T(\rho_0). \tag{13}$$

Из (13), (6), (9) получаем

$$T(\rho) < (c_1 \ln \rho)^{(\ln \varkappa_2)/(\ln n)} T(\rho_0). \tag{14}$$

Из первого неравенства (11) аналогично (14) получим

$$T(\rho) > (c_2 \ln \rho)^{(\ln \varkappa_1)/\ln n}\, T(\rho_0).$$

Отсюда и из (14) следует утверждение теоремы. Пусть $q = p$, $\sigma = \mu/\nu > 1$. Неравенства (11) примут вид

$$T(\mu_1 r^q) > \varkappa_1 T(\nu_2 r^q); \qquad T(\mu_2 r^q) < \varkappa_2 T(\nu_1 r^q). \tag{15}$$

Положим $\nu_1 r^q = \rho$. Тогда $\mu_2 r^q = \rho\mu_2/\nu_1$. Но $\mu_2 = \mu - \varepsilon'$, $\nu_1 = \nu + \varepsilon'$, $\sigma = \mu/\nu > 1$. Если ε' достаточно мало, то $\mu_2/\nu_1 = \sigma_* = \sigma - \varepsilon > 1$, $(\varepsilon > 0)$, и второе из неравенств (15) запишется так $(\rho > \rho_0)$ $T(\sigma_*\rho) < (\varkappa + \varepsilon) T(\rho)$. Отсюда, как и при доказательстве теорем 2,3 из [2] следует $T(r) < r^{\ln(\varkappa+\varepsilon)/\ln(\sigma-\varepsilon)}$ $(r > r_0)$. Аналогично из первого неравенства (15), делая замену $\nu_2 r^q = \rho$ и, обозначая $\sigma_* = \mu_1/\nu_2 = \sigma + \varepsilon$, получим $T(\sigma_*\rho) > (\varkappa - \varepsilon) T(\rho)$. Следовательно, [2], $r^{\ln(\varkappa-\varepsilon)/\ln(\sigma+\varepsilon)} < T(r)$. Теорема доказана.

Если в (2) $n > 1$, $\varkappa < n$, то из (14) следует, что $T(r) = o(\ln r)$, т. е. $f \equiv \mathrm{const}$ [1]. Но (14) получено при условии, что для всех коэффициентов $a(z)$ уравнения (2) $T(r, a) = o(T(r, f))$. Поэтому при $\varkappa < n$ для всех $f \in M_\infty$, $f \not\equiv \mathrm{const}$ — решений (2), найдется коэффициент $a(z)$, что $T(r, a) \neq o(T(r, f))$.

Замечание. Если в (2) $n \neq 1$ и все коэффициенты $a(z)$ — многочлены, то для трансцендентных решений (2) можно дать более точную оценку $\ln T(r, f) = \ln \varkappa \ln\ln r/\ln n + O(1)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $q > p$. Тогда, учитывая условия теоремы, из (5), (10) получим $T(\mu_2 r^q, f) < \varkappa_2 T(\nu_1 r^p, f) + K_1 T(r, f) < K_2 T(\nu_2' r^p, f)$, где $K_2 = \varkappa_2 + K_1$, $\nu_2' = \max(1, \nu_1)$. Отсюда, как и при доказательстве (14), следует

$$T(r, f) < (c_1 \ln r)^{\ln K_2/\ln n} T(r_0, f), \text{ т. е. } \ln T(r, f) < A \ln\ln r, \quad A = \mathrm{const}.$$

Если $q = p$, $\sigma > 1$, то аналогично показывается, что $\ln T(r, f) < A \ln r$.

Замечание. При более слабых, чем в теореме 1, ограничениях на коэффициенты можно получить оценку снизу роста решений уравнения

$$Q(z, f(g(z))) = a_{s2}(z)\ [f(p(z))]^s + \ldots + a_{12}(z) f(p(z)) + a_{02}(z). \tag{16}$$

где $a_{i2}(z)$, $f(z) \in M_\infty$; $Q(z, w)$, $g(z)$, $p(z)$ такие же, как в теореме 1, $q \geqslant p$. Пусть $T(r, a) = \Sigma T(r, a_{ij})$ — сумма характеристик всех коэффициентов, входящих в (16). Справедливо утверждение:

Пусть $f \in M_\infty$ — трансцендентное решение (16), такое, что $T(r, a) <$

$< cT(r^k, f)$, где $k \leqslant p$ (при $k = p$, предполагаем, что $\nu > 1$). Если $\varkappa(1 - (ck/p)) > 1$, то $(\varepsilon > 0,\ r > r_0)$

$$T(r, f) > \begin{cases} (\ln r)^{\ln[\varkappa(1-(ck/p))-\varepsilon]/\ln n}, & n > 1, \\ r^{\ln[\varkappa(1-(ck/p))-\varepsilon]/\ln \sigma}, & n = 1,\ \sigma > 1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 3. Всегда можно считать, что в (2) $q \geqslant p$, $(n \geqslant 1)$. Из (5), (10) следует ($c = \mathrm{const}$)

$$T(\mu_2 r^q) < \varkappa T(\nu_1 r^p) + cT(r, a). \tag{17}$$

Пусть $q > p$. Если $\varkappa < 1$, то из (17) следует $(1-\varkappa)T(\mu_2 r^q) < cT(r, a)$, т. е. $T(\rho) = O(T(\rho, a))$, если $\tau = \ln\varkappa/\ln n < 0$. Пусть $\varkappa \geqslant 1$, $(\tau \geqslant 0)$. Если $q > p > 1$, (или $q > p = 1$, $\nu_1 \geqslant 1$), сделаем замену $\rho = \nu_1 r^p$, если $q > p = 1$, $\nu_1 < 1$, положим $r = \rho$. Учитывая, что для $f \in M_\infty$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, $T(r, f) \nearrow \infty$, из (17) получим

$$T(\omega\rho^n) < \varkappa T(\rho) + cT(\rho, a), \tag{18}$$

где $\omega = \mu_2/\nu_1^{q/p}$, если $q > p > 1$ (или $q > p = 1$, $\nu_1 \geqslant 1$); $\omega = \mu_2$, если $q > p = 1$, $\nu_1 < 1$, $(n = q/p)$. Пусть $\rho = \rho_0 > \rho_*$. У нас $\varkappa \geqslant 1$; если $\varkappa > 1$, то $\varkappa^{k-1} + \ldots + \varkappa + 1 = (\varkappa^k - 1)/(\varkappa - 1)$. Как и при доказательстве теоремы 1, из (18) следует

$$T(\omega^{n^{k-1}+\ldots+1}\rho_0^{n^k}) < \varkappa T(\omega^{n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-1}}) +$$
$$+ cT(\omega^{n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-1}}, a) < \ldots < \varkappa^k T(\rho_0) +$$
$$+ c[T(\omega^{n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-1}}, a) + xT(\omega^{n^{k-3}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-2}}, a) +$$
$$+ \ldots + \varkappa^{k-2}T(\omega\rho_0^n, a) + \varkappa^{k-1}T(\rho_0, a)] <$$
$$< \begin{cases} \varkappa^k[cT(\omega^{n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-1}}, a) + c_2], & \varkappa > 1, \\ k[cT(\omega^{n^{k-2}+\ldots+1}\rho_0^{n^{k-1}}, a) + c_2], & \varkappa = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Из (19), (6), (8), (9), учитывая, что $T(r, f) \nearrow$, получим (3).

Пусть $q = p$. Тогда $\sigma = \mu/\nu \geqslant 1$. Предположим, что $\sigma > 1$, $(\mu > \nu)$. По определению $\mu_2 = \mu - \varepsilon'$, $\nu_1 = \nu + \varepsilon'$. Можно подобрать $\varepsilon' > 0$ так, что $\mu_2/\nu_1 = \sigma - \varepsilon > 1$. Если $\varkappa < 1$, то из (17) следует $cT(r, a) > (1-\varkappa)$ $T(\mu_2 r^q, f)$, т. е. $T(\rho, f) = O(T(\rho, a))$ (при $p = q = 1$ мы предполагаем, что $\mu > 1$). Пусть $\varkappa \geqslant 1$. Сделаем замену: если $q = p > 1$ (или $p = q = 1$, $\nu > 1$), то положим $\nu_1 r^p = \rho$, если же $q = p = 1$, $\nu < 1$, то положим $r = \rho$. Тогда из (17) следует

$$T(\sigma_*\rho, f) < \varkappa T(\rho, f) + cT(\rho, a), \tag{20}$$

где $\sigma_* = \mu_2/\nu_1 > 1$, если $q = p > 1$ или $q = p = 1$, $\nu > 1$. Если же $q = p = 1$, $\nu < 1$, то $\sigma_* = \mu_2 > 1$. Из (20) так же, как и при доказательстве теоремы 2 из [2], следует (4).

1. Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М. «Наука», 1970, 592 с.
2. Мохонько А. З О дифференциальных и функциональных уравнениях с множителями — Дифференц уравнения, 1979 т 15, № 9, с. 1713—1715.
3. Валирон Ж. Аналитические функции, М. Физматгиз, 1957, 235 с.
4. Goldstein R., On meromorphic solutions of certain functional equations., «Aequat math.», 1978, 18, 112—157
5. Мохонько А. З., Мохонько В. Д. Оценки неванлинновских характеристик некоторых классов мероморфных функций и их приложения к дифференциальным уравнениям.— Сибирский матем журн., 1974, т. 15, № 6, с. 1305—1322.
6. Gross F., Yang C.—C. On the growth of the meromorphic solutions of certain functional—differential equations «Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur». 1972 (1973) 53, N 1—2, 50—55.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию 31.03.1980 г.,
после переработки — 18.11.1980 г.