УДК 517.9

Ф. У. Носиров

К вопросу о сильной устойчивости уравнения с запаздыванием

В работе [3] применены асимптотические методы [1, 2] к построению приближенного решения уравнения

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \varepsilon f\left(\tau, \theta, x(t), x(t-\Delta(\tau)), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t-\Delta(\tau))}{dt}\right). \tag{1}$$

Полученное [3] приближенное решение для достаточно большого отрезка времени с необходимой точностью представляет решение уравнения (1). В ряде случаев это приближенное решение обладает особым свойством сильной устойчивости.

В настоящей работе рассмотрим частный случай уравнения (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon X(x(t), x(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon) + V(\tau)\cos\theta, \tag{2}$$

где ω — const, $\tau = \varepsilon t$, $\dfrac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$.

Теорема. *Пусть выполняются условия: а) существует такая положительная постоянная* λ, *для которой функция* $X(x, x(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}, \dot{x}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)$ *удовлетворяет условию*

$$|X(x^{(1)}, x^{(1)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}^{(1)}, \dot{x}^{(1)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon) - X(x^{(2)}, x^{(2)} \times$$

$$\times (t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}^{(2)}, \dot{x}^{(2)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)| \leqslant \lambda\{[|x^{(1)} - x^{(2)}| + |x^{(1)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)) -$$

$$- x^{(2)}(t-\varepsilon\Delta)(\tau))|]\,\omega + [|\dot{x}^{(1)} - \dot{x}^{(2)}| + |\dot{x}^{(1)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)) - \dot{x}^{(2)}(t-\varepsilon\Delta(\tau))|]\}; \tag{3}$$

$$\text{б) } |F(t)| \leqslant I, \quad 0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon, \ \textit{где} \ F(t) = V(\tau)\cos\theta; \tag{4}$$

$$\text{в) } \frac{1}{T}\int_0^T X(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)))\, x^{(0)}dt \leqslant -\beta a^2 \tag{5}$$

для любых $T \geqslant T_0$, *где*

$$x^{(0)} = a\cos(\omega t + \varphi), \qquad a = \sqrt{x^2(t_0) + \frac{x^2(t_0)}{\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega x(t_0)}; \tag{6}$$

$$\text{г) } |\dot{x}(t)| \leqslant C^1, \qquad |\ddot{x}(t)| \leqslant C^2, \tag{7}$$

C^1, C^2 — *положительные постоянные. Тогда существуют такие положительные* ε_0, M, T^*, *что* неравенство

$$|x(t)| \leqslant M \tag{8}$$

выполняется при всех $t \geqslant T^*$

Докажем лемму.

Лемма. *Если выполняются первые два условия теоремы, то любому сколь угодно большому положительному* L *всегда можно сопоставить такие положительные постоянные* C, C_1, C_2 *и такое малое положительное постоянное* ξ_0, *для которых*

$$|x - a\cos(\omega t + \varphi)| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\,(a + C_1), \quad |\dot{x} - a\omega\sin(\omega t + \varphi)| \leqslant C\omega\sqrt{\varepsilon}\,(a + C_2) \tag{9}$$

выполняются на интервале $|t - t_0| < L/\sqrt{\varepsilon}$ *для всех* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0^2$

Доказательство. Интегрируя уравнение (2) в пределах от t_0 до t и принимая во внимание условие (4), получаем

$$|x^0(t) - x^{(0)}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\omega}\int_{t_0}^{t} |X(x, x(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}, \dot{x}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)|\, dt_1 + $$
$$+ \frac{\varepsilon}{\omega} I(t-t_0),$$

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}^{(0)}(t)| \leqslant \varepsilon \int_{t_0}^{t} |X(x, x(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}, \dot{x}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)\, dt_1 + \varepsilon I(t-t_0).$$

Здесь приняты такие обозначения:

$$x^{(0)}(t) = x(t_0)\cos\omega(t-t_0) + \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega}\sin\omega(t-t_0),$$

$$\dot{x}^{(0)}(t) = -x(t_0)\sin\omega(t-t_0) + \dot{x}(t_0)\cos\omega(t-t_0).$$

Отсюда согласно условию (3) имеем

$$|x(t) - x^{(0)}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\omega} I(t-t_0) + \frac{\varepsilon\lambda}{\omega}\int_{t_0}^{t} \{[|x - x^{(0)}| + |x(t-\varepsilon\Delta(\tau)) -$$

$$- x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau))|]\,\omega + \frac{\varepsilon}{\omega}\int_{t_0}^{t} |X(x^{(0)}, x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}^{(0)}, \dot{x}^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)|\, dt_1, \tag{10}$$

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}^{(0)}(t)| \leqslant \varepsilon\lambda\int_{t_0}^{t} \{[|x - x^{(0)}| + |x(t-\varepsilon\Delta(\tau)) - x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau))|]\,\omega +$$

$$+ \varepsilon\int_{t_0}^{t} |X(x^{(0)}, x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}^{(0)}, \dot{x}^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)|\, dt_1 + \varepsilon I(t-t_0),$$

Складывая неравенства (10), получаем

$$Z(t) \leqslant 2\varepsilon\lambda\int_{t_0}^{t} [Z(t_1) + Z(t_1 - \varepsilon\Delta(\tau))]\, dt_1 + 2\varepsilon\int_{t_0}^{t} |X(x^{(0)}, x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)),$$

$$\dot{x}^{(0)}, \dot{x}^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)|\, dt_1 + 2\varepsilon I(t-t_0), \tag{11}$$

где

$$Z(t) = [\,|x(t) - x^{(0)}(t)|\,\omega + |\dot{x}(t) - \dot{x}^{(0)}(t)|\,],$$

$$Z(t-\varepsilon\Delta(\tau)) = [\,|x(t-\varepsilon\Delta(\tau)) - x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau))|\,\omega + |\dot{x}(t-\varepsilon\Delta(\tau)) -$$

$$- \dot{x}^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau))|\,]. \tag{12}$$

Учитывая условие (7), находим

$$Z(t-\varepsilon\Delta(\tau)) \leqslant |x(t) - x^{(0)}(t)|\,\omega + |\dot{x}(t)\,\varepsilon\Delta(\tau) - \dot{x}^{(0)}(t)\,\varepsilon\Delta(\tau)|\,\omega +$$

$$+ |\dot{x}(t) - x^{(0)}(t)| + |\ddot{x}(t)\,\varepsilon\Delta(\tau) - \ddot{x}^{(0)}\varepsilon\Delta(\tau)| \leqslant Z(t) + C^1\varepsilon\Delta(\tau) +$$

$$+ |a|\,\omega\varepsilon\Delta(\tau) + C^2\varepsilon\Delta(\tau) + |a|\,\omega^2\varepsilon\Delta(\tau) = Z(t) + S^*, \tag{13}$$

где $S^* = C'\varepsilon\Delta(\tau) + |a|\,\omega\varepsilon\Delta(\tau) + C^2\varepsilon\Delta(\tau) + |a|\,\omega^2\varepsilon\Delta(\tau)$. Согласно условию леммы имеем

$$|X(x^{(0)}, x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}^{(0)}, x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau))\,\varepsilon)| \leqslant |X^{(0)}| + \lambda\{|x^{(0)}|\,\omega +$$

$$+ |\dot{x}(0)| + |x^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau))|\,\omega + |\dot{x}^{(0)}(t-\varepsilon\Delta(\tau))|\} \leqslant |X^{(0)}| + 4\lambda|a|\,\omega, \tag{14}$$

где $X^{(0)} = X(0, 0, 0, 0, \varepsilon)$

Подставляя (12), (13) в (10), находим

$$Z(t) \leqslant 2\varepsilon\lambda \int_{t_0}^{t} [Z(t_1) + Z(t_1) + S^*]\, dt_1 + 2\varepsilon\, (|x^{(0)}|^{t_0} + 4\lambda\, |a|\, \omega + I)(t - t_0) =$$

$$= 4\varepsilon\lambda \int_{t_0}^{t} Z(t_1)\, dt_1 + 4\varepsilon \left(\frac{|X^{(0)}|}{2} + \frac{I}{2} + \frac{S^*\lambda}{2} + 2\lambda\, |a|\, \omega\right)(t - t_0) =$$

$$= 4\varepsilon\lambda \int_{t_0}^{t} Z(t_1)\, dt_1 + 4\varepsilon\lambda\, (S + |a|\, \omega)(t - t_0), \qquad (15)$$

где $S = |X^{(0)}|/2 + I/2 + S^*/2$.

Обозначая правую часть (15) через $\xi(t)$, получаем

$$Z(t) = \xi(t), \qquad (16)$$

где $\xi(t)$ — решение уравнения $\xi(t) = 4\varepsilon\lambda \int_{t_0}^{t} \xi(t_1)\, dt_1 + 4\varepsilon\lambda\, (S + 2\, |a|\, \omega)(t - t_0)$.

Находим

$$\xi(t) = (S\lambda + 2\lambda\, |a|\, \omega)\, [e^{4\varepsilon\lambda(t - t_0)} - 1]\, \lambda^{-1}. \qquad (17)$$

Положим $L^{-1} = 4\lambda$. Подставляя $t - t_0 \leqslant L/\sqrt{\varepsilon}$ и принимая во внимание (16), из (17) находим

$$Z(t) \leqslant (e^{\sqrt{\varepsilon}} - 1)(2\, |a|\, \omega + S). \qquad (18)$$

Пренебрегая в правой части (18) членами порядка малости ε и выше, учитывая (11), для отрезка $|t - t_0| \leqslant L\sqrt{\varepsilon}$ получаем неравенство (9). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Умножим уравнения (2) на $\dot{x}(t)$ и проинтегрируем от t_0 до $t_0 + T$:

$$\frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \omega^2 x^2]\Big|_{t_0}^{t_0+T} = \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} F(t)\, \dot{x}(t)\, dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} X(x, x(t - \varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}, \dot{x} \times$$

$$\times (t - \varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)\, dt,$$

где $T = L/\sqrt{\varepsilon}$. Отсюда, принимая во внимание условия теоремы, получаем

$$\omega^2 \frac{1}{2}[a^2(t_0 + T) - a^2(t_0)] = \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} F(t)\, \dot{x}^{(0)} dt + D + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} X(x^{(0)}, x^{(0)} \times$$

$$\times (t - \varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}^{(0)}, \dot{x}^{(0)}(t - \varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)\, \dot{x}^{(0)} dt, \qquad (10)$$

где

$$|D| \leqslant \varepsilon I \int_{t_0}^{t_0+T} |\dot{x} - \dot{x}^{(0)}|\, dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} |\dot{x}^{(0)}|\, \lambda \{|x^{(0)} - x|\, \omega + |\dot{x}^{(0)} - \dot{x}| +$$

$$+ |x^{(0)}(t - \varepsilon\Delta(\tau)) - x(t - \varepsilon\Delta(\tau)) - x(t - \varepsilon\Delta(\tau))|\, \omega + |\dot{x}^{(0)}(t - \varepsilon\Delta(\tau)) -$$

$$- \dot{x}(t - \varepsilon\Delta(\tau))|\}\, dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} |\dot{x} - \dot{x}^{(0)}|\, \lambda \{|x^{(0)} - x|\, \omega + |\dot{x}^{(0)} - \dot{x}| +$$

$$+ |x^{(0)}(t - \varepsilon\Delta(\tau)) - x(t - \varepsilon\Delta(\tau))|\, \omega + |\dot{x}^{(0)}(t - \varepsilon\Delta(\tau)) -$$

$$- \dot{x}(t - \varepsilon\Delta(\tau))|\}\, dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_0+T} |X(x^{(0)}, x^{(0)}(t - \varepsilon\Delta(\tau)), \dot{x}^{(0)}, \dot{x}^{(0)} \times$$

$$\times (t - \varepsilon\Delta(\tau)), \varepsilon)|\, |\dot{x} - \dot{x}^{(0)}|\, dt.$$

Учитывая (13), (14) и доказанную лемму, получаем

$$|D| \leqslant \varepsilon IC\omega \sqrt{\varepsilon}(a + C_2) T + \varepsilon [(|x^{(0)}| + 4\lambda |a| \omega) C \sqrt{\varepsilon}\omega (a + C_2)] T +$$
$$+ \varepsilon \{a\omega\lambda [2C \sqrt{\varepsilon}(a + C_1)\omega + 2C\sqrt{\varepsilon}(a + C_2)\omega + S^*]\} T + \varepsilon \{C\omega\sqrt{\varepsilon}(a+C_2)\lambda \times$$
$$\times [2C\sqrt{\varepsilon}(a + C_1)\omega + 2C\sqrt{\varepsilon}(a + C_2)\omega + S^*]\} T = \varepsilon\sqrt{\varepsilon}[S_1 a^2 + S_2|a| + S_3] T, \quad (20)$$

где $S_1 = 8\lambda\omega^2 C + 4\sqrt{\varepsilon}C^2\omega^2$ $S_2 = IC\omega + 6\lambda\omega^2 CC_2 + |x^{(0)}| C\omega + 2\lambda\omega^2 CC_1\lambda + + \omega\lambda \frac{S^*}{\sqrt{\varepsilon}} + 2\lambda\omega^2 C^2 C_1 \sqrt{\varepsilon} + 6\lambda\omega^2 CC_2\sqrt{\varepsilon} + \omega\lambda CS^*$, $S_3 = IC_2C\omega + |x^{(0)}| \times \times CC_2\omega + 2C^2C_2\omega(C_1 + C_2)\sqrt{\varepsilon} + CC_2\lambda\omega S^*$.

Выберем ε_0 таким образом, чтобы $\sqrt{\varepsilon}S_1 \leqslant \beta/2$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0^2$. Тогда неравенство (20) примет вид

$$|D| \leqslant \frac{\varepsilon a^2}{2} T + \varepsilon\sqrt{\varepsilon}(S_2|a| + S_3) T \quad (21)$$

Мажорируя правую часть (19) и учитывая (21), находим

$$\omega^2 \frac{1}{2}[a^2(t_0 + T) - a^2(t_0)] \leqslant -\frac{\beta\varepsilon}{2} a^2(t_0) T + \varepsilon\sqrt{\varepsilon} S_2 a(t_0) T +$$
$$+ \varepsilon\sqrt{\varepsilon} S_3 T + \varepsilon I_1 a T, \quad (22)$$

где $I_1 = \sqrt{N}\cdot I_{\max}$.

Обозначив $\omega^2 a^2(t_0) = \eta^2(t_0)$, $t_s = ST$, находим $\eta^2(t_{s+1}) \leqslant \eta^2(t_s) \times \times (1 - \beta\varepsilon T) + 2\varepsilon I_1 \eta(t_s) T + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon} S_2 \eta(t_s) T + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon} S_3 T$.

Пользуясь теми же приемами, что и в работе [1], убеждаемся, что, начиная с некоторого $S \geqslant S_0$, выполняется неравенство

$$\eta(t_s) \leqslant \sup(M, M_1), \quad (23)$$

где

$$M = \frac{2}{\beta}\{I_1 + S_2\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{(I_1 + S_2\sqrt{\varepsilon})^2 + S_3\beta\sqrt{\varepsilon}}\},$$
$$M_1^2 = M^2(1 - \beta\varepsilon T) + 2\varepsilon T[I_1 M + \sqrt{\varepsilon}(S_2 M + S_3)].$$

Из (23) следует справедливость неравенства (7). Теорема доказана.

1. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. *432*.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, *408*
3. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев: Вища школа, 1979, *248*.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
26.09.1980 г.