УДК 517.43

Н. А. Пахарева, И. Н. Александрович

Представление p-волновых функций в виде линейных комбинаций волновых функций и их производных

Пусть $\varphi(z) = u + iv$ — p-волновая функция от $z = x + iy$, определенная системой уравнений

$$pu_x = v_y, \qquad pu_y = v_x, \tag{1}$$

где $p = p(x, y)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция от x и y, $p(x, y) > 0$. При $p \equiv 1$ функция $\varphi(z)$ называется волновой [1].

Если ввести дифференциальные операторы

$$\frac{d\varphi}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi(z)}{\partial x} - i\frac{\partial\bar{\varphi}(z)}{\partial y}\right] = \frac{u_x - v_y}{2} + i\frac{v_x - u_y}{2},$$

$$\frac{d_p\varphi(z)}{d\bar{z}} = \frac{pu_x - v_y}{2} + i\frac{v_x - pu_y}{2},$$

то легко заметить, что система (1) эквивалентна уравнению

$$\frac{d_p\varphi(z)}{d\bar{z}} = 0, \tag{2}$$

которое для волновой функции $\varphi_0(z) = u_0(x, y) + iv_0(x, y)$ принимает вид

$$\frac{d\varphi_0(z)}{d\bar{z}} = 0. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться, что общим решением уравнения (3) будет

$$\varphi_0(z) = f_1(x - y) + f_2(x + y) + i[f_2(x + y) - f_1(x - y)], \tag{4}$$

где $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Изучим возможность представления p-волновых функций $\varphi(z)$ в виде линейных комбинаций волновых функций $\varphi_0(z) = u_0 + iv_0$ и их производных первого порядка

$$\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \omega_1 u_0 + w_1 v_0 + \omega_2 u_{0x} + w_2 v_{0x}, \tag{5}$$

где $\omega_k = \alpha_k + i\beta_k$, $w_k = \nu_k + i\delta_k$, $k = 1, 2$, — некоторые функции от z.

Подставляя (5) в (2), получим систему уравнений для определения коэффициентов ω_k, w_k

$$\begin{gathered} p\alpha_{1x} = \beta_{1y}, \quad p\alpha_{1y} = \beta_{1x}, \quad p\nu_{1x} = \delta_{1y}, \quad p\nu_{1y} = \delta_{1x}, \quad \alpha_2 p = \delta_2, \quad p\nu_2 = \beta_2, \\ \nu_2 p = \beta_2, \quad p\alpha_2 = \delta_2, \quad p(\alpha_1 + \alpha_{2x}) = \delta_1 + \beta_{2y}, \quad p(\nu_1 + \alpha_{2y}) = \beta_1 + \beta_{2x}, \\ p(\nu_1 + \nu_{2x}) = \beta_1 + \delta_{2y}, \quad p(\alpha_1 + \nu_{2y}) = \delta_1 + \delta_{2x}, \end{gathered} \tag{6}$$

Введем в рассмотрение функции λ_k, μ_k, определяемые равенствами

$$\lambda_k = \sqrt{p}\alpha_k + i\beta_k/\sqrt{p}, \quad \mu_k = \sqrt{p}\nu_k + i\delta_k/\sqrt{p}, \quad k = 1, 2. \tag{7}$$

Из системы (6) легко получаем

$$\lambda_2 - i\bar{\mu}_2 = 0; \tag{8}$$

$$(\lambda_1 - i\bar{\mu}_1)/2 + p^{-\frac{1}{2}}\frac{d_p\omega_2}{d\bar{z}} = 0, \qquad (i\lambda_1 + \bar{\mu}_1)/2 + p^{-\frac{1}{2}}\overline{\frac{d_p w_2}{d\bar{z}}} = 0; \tag{9}$$

$$\frac{d_p\omega_1}{d\bar{z}} = 0, \qquad \frac{d_p w_1}{d\bar{z}} = 0. \tag{10}$$

Уравнения (9) можно записать в виде

$$\begin{gathered} (\lambda_1 - i\bar{\mu}_1)/2 + \frac{d\lambda_2}{d\bar{z}} - (p'_x/p\bar{\lambda}_2 - ip'_y/p\lambda_2)/4 = 0, \\ (\lambda_1 - i\bar{\mu}_1)/2 - \frac{d\lambda_2}{d\bar{z}} - (p'_x/p\bar{\lambda}_2 - ip'_y/p\lambda_2/4 = 0. \end{gathered} \tag{9'}$$

Отсюда

$$\frac{d\lambda_2}{d\bar{z}} = 0; \tag{11}$$

$$\lambda_1 = i\bar{\mu}_1 + A\lambda_2, \tag{12}$$

где оператор $A\lambda$ определяется равенством

$$A\lambda = (p'_x/p\bar{\lambda} - ip'_y/p\lambda)/2 \tag{13}$$

Из (11) и (8) вытекает, что $\lambda_2 = i\bar{\mu}_2 = C_2(z)$ — волновая функция.

Учитывая, что $\omega_1 = \alpha_1 + i\beta_1 = \operatorname{Re}\lambda_1/\sqrt{p} + i\sqrt{p}\operatorname{Im}\lambda_1$, $w_1 = \nu_1 + i\delta_1 = \operatorname{Re}\mu_1/\sqrt{p} + i\sqrt{p}\operatorname{Im}\mu_1$, из (10) получаем

$$\frac{d\lambda_1}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}A\lambda_1, \quad (14) \qquad \frac{d\mu_1}{d\bar{z}} = A\mu_1/2. \tag{15}$$

Уравнения (8), (11), (12), (14), (15) представляют собой систему из пяти уравнений относительно четырех функций λ_k, μ_k, $k = 1, 2$, условия разрешимости которой являются условиями представления p-волновой функции в виде (5). Для получения этих условий сделаем дополнительное предположение: будем считать, что функция $p(x, y)$ удовлетворяет условию

$$p_x^2 - p_y^2 \neq 0. \tag{16}$$

Это условие означает, что $p(x, y)$ не является характеристической переменной системы (1).

При выполнении (16) легко устанавливаем существование оператора A^{-1}, обратного к A,

$$\lambda = A^{-1}\Lambda = 4p^2/(p_x^2 - p_y^2)\, A\Lambda. \tag{17}$$

Возьмем от обеих частей (12) операторы $\frac{d}{d\bar{z}}$ и $A/2$. Тогда с учетом (14) получаем равенства

$$A\lambda_1/2 = \frac{d(i\bar{\mu}_1)}{d\bar{z}} + \frac{d(A\lambda_2)}{d\bar{z}}; \tag{18}$$

$$A\lambda_1/2 = [A(i\bar{\mu}_1)]/2 + A^2\lambda_2/2. \tag{19}$$

Складывая (18) и (19), получаем

$$A\lambda_1 = \frac{d(i\bar{\mu}_1)}{d\bar{z}} + 1/2A(i\bar{\mu}_1) + 1/2A^2\lambda_2 + \frac{d(A\lambda_2)}{d\bar{z}}. \tag{20}$$

С помощью (15) непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства

$$\frac{d(i\bar{\mu}_1)}{d\bar{z}} = -1/2A(i\bar{\mu}_1),$$

с учетом которого соотношение (20) запишем в виде

$$A\lambda_1 = 1/2A^2\lambda_2 + \frac{d(A\lambda_2)}{d\bar{z}}. \tag{20'}$$

Оператор A^{-1} от обеих частей равенства (20′) дает

$$\lambda_1 = (A\lambda_2)/2 + A^{-1}\left(\frac{d(A\lambda_2)}{d\bar{z}}\right). \tag{21}$$

Взяв от обеих частей (21) оператор $\frac{d}{d\bar{z}}$, с помощью (14) и (20) окончательно находим

$$\frac{d}{d\bar{z}}\left[A^{-1}\left(\frac{d}{d\bar{z}}(A\lambda_2)\right)\right] - (A^2\lambda_2)/4 = 0 \tag{22}$$

Равенство (22) выражает необходимое условие разрешимости системы (8), (11), (12), (14), (15).

Достаточное условие ее разрешимости можно сформулировать следующим образом. Если существует отличная от тождественного нуля волновая

функция $\lambda_2(z)$, удовлетворяющая уравнению (22) то система уравнений (8), (12), (14), (15) имеет нетривиальное решение λ_k, μ , $k_k = 1, 2$.
Определив через него по формулам (6) функции ω_k и w_k и подставив их в равенство (5), получим искомое представление p-волновой функции в виде линейной комбинации волновой функций и ее производных первого порядка.

В частности, если предположить, что p зависит только от x, то условие (22) примет вид

$$\lambda_2(z)\left[\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\left(\ln\frac{d\ln p}{dx}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{d\ln p}{dx}\right)^2\right]=0.$$

Отсюда при $\lambda_2(z)\neq 0$ имеем

$$\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\left(\ln\frac{d\ln p}{dx}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{d\ln p}{dx}\right)^2=0. \tag{23}$$

Решения уравнения (23) имеют вид $p=(\lambda_0x+\nu_0)^2$, $p=\mu_0\,\mathrm{cth}^2(\lambda_0x+\nu_0)$, $p=\mu_0^2\,\mathrm{ctg}^2(\lambda_0x+\nu_0)$, где λ_0, ν_0, μ_0 — произвольные постоянные, $\lambda_0>0$.

Пусть, например, $p(x)=(\lambda_0x+\nu_0)^2$. Считая $\lambda_2(z)\neq 0$ произвольной заданной волновой функцией, для определения $\lambda_1(z)$, $\mu_1(z)$ и $\mu_2(z)$ получаем систему уравнений

$$\lambda_2-i\bar{\mu}_2=0,\qquad \frac{d\lambda_1}{d\bar{z}}=[\lambda_0\bar{\lambda}_1/(\lambda_0x+\nu_0)]/2,$$

$$\lambda_1=i\bar{\mu}_1+\lambda_0\bar{\lambda}_2/(\lambda_0x+\nu_0),\qquad \frac{d\mu_1}{d\bar{z}}=[\lambda_0\bar{\mu}_1/(\lambda_0x+\nu_0)]/2.$$

Решая ее, находим

$$\lambda_1(z)=\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}-i\lambda_0/(\lambda_0x+{}_0)\,\mathrm{Im}\,\lambda_2,\qquad \mu_1(z)=i\frac{\partial\bar{\lambda}_2}{\partial x}-i\lambda_0/(\lambda_0x+\nu_0)\,\mathrm{Re}\,\lambda_2,$$
$$\mu_2(z)=i\bar{\lambda}_2(z).$$

Учитывая (6), получаем

$$\omega_1=\alpha_1+i\beta_1=(\lambda_0x+\nu_0)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\,\lambda_2+i(\lambda_0x+\nu_0)\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\,\lambda_2-\right.$$
$$\left.-\lambda_0/(\lambda_0x+\nu_0)\,\mathrm{Im}\,\lambda_2\right],\quad \omega_2=\alpha_2+i\beta_2=(\lambda_0x+\nu_0)^{-1}\,\mathrm{Re}\,\lambda_2+i(\lambda_0x+\nu_0)\,\mathrm{Im}\,\lambda_2,$$
$$w_1=\nu_1+i\delta_1=(\lambda_0x+\nu_0)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\,\lambda_2+i(\lambda_0x+\nu_0)\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\,\lambda_2-\right.$$
$$\left.-\lambda_0/(\lambda_0x+\nu_0)\,\mathrm{Re}\,\lambda_2\right],\qquad w_2=\nu_2+i\delta_2=(\lambda_0x+\nu_0)^{-1}\,\mathrm{Im}\,\lambda_2+$$
$$+i(\lambda_0x+\nu_0)\,\mathrm{Re}\,\lambda_2.$$

Подставляя найденные коэффициенты в равенство (5), получаем

$$\varphi(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(\lambda_0x+\nu_0)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}[u_0\,\mathrm{Re}\,\lambda_2+v_0\,\mathrm{Im}\,\lambda_2]+$$
$$+i\left[-\lambda_0(u_0\,\mathrm{Im}\,\lambda_2+v_0\,\mathrm{Re}\,\lambda_2)+(\lambda_0x+\nu_0)\frac{\partial}{\partial x}(u_0\,\mathrm{Im}\lambda_2+v_0\,\mathrm{Re}\,\lambda_2)\right].$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что функция $u_0\mathrm{Re}\,\lambda_2+{}+v_0\,\mathrm{Im}\,\lambda_2+i(u_0\,\mathrm{Im}\,\lambda_2+v_0\,\mathrm{Re}\,\lambda_2)$ — волновая. Следовательно, представление (5) при $p=(\lambda_0x+\nu_0)^2$ имеет вид

$$\varphi(z)=u+iv=(\lambda_0x+\nu_0)^{-1}u_{0x}-i[\lambda_0v_0-(\lambda_0x+\nu_0)\,v_{0x}], \tag{24}$$

или с учетом $u_{0x}=v_{0y}$, $v_{0x}=u_{0y}$ —

$$\varphi(z)=u+iv=(\lambda_0x+\nu_0)^{-1}v_{0y}-i[\lambda_0v_0-(\lambda_0x+\nu_0)\,v_{0x}] \tag{24'}$$

Представление (24) позволило решить в классе $(\lambda_0x+\nu_0)^2$-волновых функций задачу Коши с данными на произвольной гладкой дуге.

1. *Пахарева Н. А.*, *Александрович И. Н.* О p-волновых функциях с логарифмически-волновой характеристикой p.— Докл. АН УССР, 1980, 4, *23—26*.
2. *Кошляков Н. С.*, *Глинер Э. Б.*, *Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз. 1962. *767*.

Киевский университет

Поступила в редакцию
28.02.1980 г.