УДК 517.948:513.8+519.4

С. Е. Рукшин

Интерполяция с повторяющимися значениями

Пусть $E=\{E_k\}$, $k\geqslant 1$, — последовательность N-точечных серий $E_k=\{z_{kn}\}$, $1\leqslant n\leqslant N$, точек открытого единичного круга комплексной плоскости. Будем говорить, что для E разрешима интерполяционная задача с повторяющимися значениями, если для любой ограниченной последовательности комплексных чисел $\{W_k\}$, $k\geqslant 1$, найдется ограниченная аналитическая функция $f\in H^\infty$, принимающая в точках серии E_k значение W_k при каждом $k\geqslant 1$. В этой статье будет дано описание всех таких последовательностей и применение к задаче кратной инетрполяции. Полученные результаты могут быть выведены из теории, развитой в [1] и [2], однако применяемый здесь метод позволяет получить их более коротким и простым путем, при этом определена явная зависимость нормы интерполирующей функции через параметры множества, на котором осуществляется интерполяция.

В основополагающей работе [3] показано, что при $N=1$ необходимым и достаточным условием для интерполяционности последовательности $\{z_k\}$, $k\geqslant 1$, является условие

$$\inf_{n\geqslant 1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\left|\frac{z_k-z_n}{1-z_n\bar{z}_k}\right|=\delta>0. \tag{1}$$

В общем случае имеет место

Т е о р е м а 1. *Для последовательности E разрешима интерполяционная задача с повторяющимися значениями тогда и только тогда, когда E удовлетворяет следующему условию:*

$$\inf_{\substack{k\geqslant 1\\1\leqslant n\leqslant N}}\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{\infty}\prod_{p=1}^{N}\left|\frac{z_{kn}-z_{mp}}{1-z_{kn}\bar{z}_{mp}}\right|=\Delta>0. \tag{2}$$

В этом случае для последовательности $W\in l^\infty$ найдется интерполирующая функция с нормой, не превосходящей $A\left(\frac{4}{\Delta}\right)^N\left(N+2\log\frac{1}{\Delta}\right)\|w\|_\infty$, где A — абсолютная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подпространство H_E пространства H^∞, состоящее из ограниченных аналитических в открытом единичном круге функций, принимающих постоянное значение на каждой серии E_k, и оператор T, сопоставляющий функции $f\in H_E$ последовательность ее значений на сериях E_k. Тогда $T:H_E\to l^\infty$ и $\|T\|\leqslant 1$. Если для E разрешима интерполяция с повторяющимися значениями, то $TH_E=l^\infty$ и l^∞ изоморфно фактор-пространству H_E/K, где K — ядро оператора T, т. е. идеал всех функций, равных 0 на E. Введение фактор-нормы превращает H_E/K в банахово пространство, а оператор T индуцирует взаимнооднозначный ограниченный линейный оператор T_1, отображающий H_E/K на l^∞. По следствию из теоремы об открытом отображении (см. [4]) оператор

$(T_1)^{-1}$ ограничен, т. е. существует постоянная C, такая что для любой последовательности $w \in l^\infty$ найдется функция $f \in H_E$, для которой $\|f\|_\infty \leqslant \leqslant C\|w\|_\infty$ и $f(z_{kn}) = w_k$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant n \leqslant N$. В частности, при любом k существует функция $f_k \in H_E$ такая, что

$$f_k(z_{mn}) = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \quad (1 \leqslant n \leqslant N) \text{ и } \|f_k\|_\infty \leqslant C.$$

Ясно, что произведение Бляшке B_k с нулями, принадлежащими $\bigcup\limits_{m \neq k} E_m$, делит f_k, т. е. $\frac{f_k}{B_k} \in H^\infty$ и $\left\| \frac{f_k}{B_k} \right\|_\infty = \|f_k\|_\infty \leqslant C$, так как $|B_k(z)| = 1$ при $|z| = 1$. Таким образом, при $|z| < 1$ $|f_k(z)| \leqslant C|B_k(z)|$. Положив $z = z_{kn}$, получим $|B_k(z_{kn})| \geqslant C^{-1}|f_k(z_{kn})|$, откуда E удовлетворяет условию (2) с $\Delta = C^{-1}$.

Докажем достаточность условия (2) для разрешимости интерполяции с повторяющимися значениями. Задавшись последовательностью $w = \{w_k\}$, $k \geqslant 1$, построим функцию, интерполирующую w на конечном числе серий. Положим

$$B_M(z) = \prod_{m=1}^{M} \prod_{p=1}^{N} \frac{z - z_{mp}}{1 - z\bar{z}_{mp}},$$

$$B_{M,k}(z) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} \prod_{p=1}^{N} \frac{z - z_{mp}}{1 - z\bar{z}_{mp}}, \qquad b_{kn}(z) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{N} \frac{z - z_{kp}}{1 - z\bar{z}_{kp}},$$

$$f_M(z) = \sum_{k=1}^{M} w_k \sum_{n=1}^{N} \frac{B_{M,k}(z)\, b_{kn}(z)}{B_{M,k}(z_{kn})\, b_{kn}(z_{kn})}.$$

Легко увидеть, что $f_M(z_{kn}) = w_k$, $1 \leqslant k \leqslant M$, $1 \leqslant n \leqslant N$. Общий вид функций, интерполирующих w на первых M сериях $f_{M,g} = f_M + gB_M$, где $g \in H^\infty$ Из свойств нормальных семейств аналитических функций следует, что нам достаточно показать конечность

$$\sup_{M \geqslant 1} \sup_{\|w\| \leqslant 1} \inf_{g \in H^\infty} \|f_{M,g}\|.$$

Тогда, выделяя сходящуюся подпоследовательность, можно получить функцию, интерполирующую w на всех сериях E_k:

$$\inf_{g \in H^\infty} \|f_{M,g}\|_\infty = \inf_{g \in H^\infty} \|f_M + gB_M\|_\infty = \inf_{g \in H^\infty} \left\| \frac{f_M}{B_M} + g \right\|_\infty, \text{ так как}$$

$$|B_M(z)| = 1 \text{ при } |z| = 1.$$

По двойственности, учитывая, что $H^\infty \cong (L^1/H_0^1)^*$ (см. [5]), получим

$$\sup_{\|w\| \leqslant 1} \inf_{g \in H^\infty} \|f_{M,g}\|_\infty = \sup_{\|w\| \leqslant 1} \sup_{f \in H^1, \|f\|_1 \leqslant 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{f_M f}{B_M}\, dz \right| =$$

$$= \sup_{\|w\| \leqslant 1} \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M} w_k \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{|z|=1} \frac{f(z)(1 - z\bar{z}_{kn})\, dz}{B_{M,k}(z_{kn})\, b_{kn}(z_{kn})(z - z_{kn})} \right| =$$

$$= \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \sum_{k=1}^{M} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{f(z_{kn})(1 - |z_{kn}|^2)}{B_{M,k}(z_{kn})\, b_{kn}(z_{kn})} \right|.$$

Пусть $\Omega_{kn}=\left\{z:\left|\frac{z-z_{kn}}{1-z\bar{z}_{kn}}\right|\leqslant\frac{\Delta}{4}\right\}$, $\Omega_k=\bigcup_{n=1}^{N}\Omega_{kn}$. Граница Ω_k состоит не более, чем из N контуров, образованных дугами окружностей $\partial\Omega_{kn}$. Из рассуждений, приведенных в § 2 работы [6], легко заключить, что круги Ω_{kn} попарно не пересекаются при разных k и $|B_{M,k}|\geqslant\frac{\Delta}{2}$ на всех граничных контурах областей Ω_k. Факторы Бляшке серии E_k на границе Ω_k больше либо равны $\frac{\Delta}{4}$ по абсолютной величине согласно определению Ω_k. Применяя теорему Коши о вычетах, имеем

$$\sup_{M\geqslant 1}\sup_{\|w\|\leqslant 1}\inf_{g\in H^\infty}\|f_{M,g}\|_\infty=\sup_{M\geqslant 1}\sup_{\|f\|_1\leqslant 1}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_k}\frac{f(z)}{g_M(z)}\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\Delta}\left(\frac{4}{\Delta}\right)^N\sup_{\|f\|_1\leqslant 1}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\partial\Omega_k}|f(z)|\frac{|dz|}{2\pi}\leqslant\frac{2^{2N+1}}{\Delta^{N+1}}\sup_{\|f\|_1\leqslant 1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{\partial\Omega_{kn}}|f(z)|\frac{|dz|}{2\pi}.$$

Если мы докажем, что мера $dm_\Omega=\frac{|dz|}{2\pi}$, сосредоточенная на окружностях $\partial\Omega_{kn}$, карлесонова с интенсивностью C_Ω, то по теореме вложения Карлесона $\int_{|z|\leqslant 1}|f|\,dm_\Omega\leqslant C_\Omega A_1\|f\|_1$, где A_1 — абсолютная постоянная.

Пусть при $|x|=1$ $K_{x,t}=\{z:|z-x|<t\}$, m_E — дискретная мера, равная $1-|z|^2$ при $z\in E$. Ее интенсивность C_E, как известно, (см. [6, 7]), не превосходит const$\cdot\left(N+2\log\frac{1}{\Delta}\right)$.

Обозначим через a_{kn} и c_{kn} соответственно ближайшую к окружности $|z|=1$ и наиболее удаленную от нее точки круга $\partial\Omega_{kn}$, а r_{kn} — его радиус. Тогда (при $\Delta\in(0,1)$)

$$\frac{r_{kn}}{1-|z_{kn}|^2}\leqslant\frac{|z_{kn}-c_{kn}|}{1-|z_{kn}|^2}=\frac{\Delta}{4}\left|\frac{1-c_{kn}\bar{z}_{kn}}{1-|z_{kn}|^2}\right|=\frac{\Delta}{4}\left|1-\bar{z}_{kn}\,\frac{z_{kn}-c_{kn}}{1-c_{kn}\bar{z}_{kn}}\right|^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\Delta}{4}\left(1-\frac{\Delta}{4}\right)^{-1}\leqslant\frac{\Delta}{3}.$$

Так как $\frac{1-|z_{kn}|}{1-|a_{kn}|}$ и $\frac{1-|c_{kn}|}{1-|z_{kn}|}$ не превосходят, согласно [6], величины $\frac{4+\Delta}{4-\Delta}<\frac{5}{3}$, то $\frac{1-|c_{kn}|}{1-|a_{kn}|}<\frac{25}{9}<3$, откуда следует, что если $K_{x,t}$ пересекает Ω_{kn}, то $K_{x,3t}$ содержит весь круг Ω_{kn}, а значит, и z_{kn}. Интенсивность меры m_Ω

$$C_\Omega\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{|x|=1,t>0}\frac{1}{t}m_\Omega K_{x,t}=\sup_{|x|=1,t>0}\frac{1}{t}\sum_{k,n}m_\Omega(\Omega_{kn}\cap K_{x,t})\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{|x|=1,\,t>0}\frac{1}{t}\sum_{\Omega_{kn}\cap K_{x,t}\neq\varnothing}r_{kn}\leqslant\sup_{x,t}\frac{1}{t}\sum_{z_{kn}\in K_{x,3t}}(1-|z_{kn}|^2)\frac{r_{kn}}{1-|z_{kn}|^2}\leqslant$$

$$\leqslant 3\cdot\frac{\Delta}{3}\sup_{|x|=1,t>0}\frac{1}{3t}\sum_{z_{kn}\in K_{x,3t}}(1-|z_{kn}|^2)=\Delta C_E.$$

Окончательно,

$$\sup_{M\geqslant 1}\sup_{\|w\|\leqslant 1}\inf_{g\in H^\infty}\|f_{M,g}\|_\infty\leqslant A\left(\frac{4}{\Delta}\right)^N\left(N+2\log\frac{1}{\Delta}\right).$$

Теорема 2. *Разрешимость интерполяционной задачи*

$$f(z_{kn}) = f_k(z_{kn}), \quad k \geqslant 1, \ 1 \leqslant n \leqslant N, \quad f \in H^\infty,$$

для произвольного ограниченного по норме набора функций $\{f_k\}$, $k \geqslant 1$, *из* H^∞ *равносильна условию* (2) *на множество* E. *При этом существует интерполирующая функция с нормой не более*

$$A\left(\frac{4}{\Delta}\right)^N \left(N + 2\log\frac{1}{\Delta}\right) \sup_{k\geqslant 1} \| f_k \|_\infty.$$

Замечание. Теоремы 1 и 2 верны и для серий, содержащих не более N точек. Доказательства и оценки полностью аналогичны.

Теорема 3. *Пусть* N — *натуральное число. Разрешимость интерполяционной задачи*

$$f^{(n)}(z_k) = f_k^{(n)}(z_k), \quad k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad f \in H^\infty,$$

для произвольного ограниченного по норме набора функций $\{f_k\}$ *из* H_∞ *имеет место в том и только в том случае, когда последовательность* $\{z_k\}$, $k \geqslant 1$, *удовлетворяет условию* (1). *При выполнении этого условия существует интерполирующая функция с нормой, не превосходящей* $4A\dfrac{8^N}{\delta^{2N+1}}\left(1 + 2\log\dfrac{1}{\delta}\right)\sup\limits_{k\geqslant 1}\| f_k \|_\infty$.

Доказательство. Необходимость условия (1) очевидна. Предположим, что $\{z_k\}$ удовлетворяет условию (1), q — натуральное число. Выберем точки $z_{k0} = z_k, z_{k1}, \ldots, z_{kN}$ в кругах $\Omega_k = \left\{z : \left|\dfrac{z - z_k}{1 - z\bar{z}_k}\right| < \dfrac{\delta}{4}\right\}$, столь близкими к z_k, что

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{n=0}^{N} \left| \frac{z - z_{kn}}{1 - z\bar{z}_{kn}} \right| \geqslant \frac{q-1}{q} \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{z - z_k}{1 - z\bar{z}_k} \right|^{N+1}$$

при $z \in \partial\Omega_k$, $k \geqslant 1$, и $|z_{kn} - z_k| < \dfrac{1}{q}$ при $1 \leqslant n \leqslant N$, $k \geqslant 1$. Для $z \in \partial\Omega_k$ (см. доказательство теоремы 1) получим

$$B(z) \geqslant \left(\prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{\infty} \left| \frac{z - z_m}{1 - z\bar{z}_m} \right| \right)^{N+1} \cdot \left| \frac{z - z_k}{1 - z\bar{z}_k} \right|^{N+1} \cdot \frac{q-1}{q} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{q-1}{q} \left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{\delta}{4} \right)^{N+1} = \frac{q-1}{q} \left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{N+1}.$$

Следуя предыдущему доказательству, можно найти функции g_q, $q \geqslant 1$, такие что $g_q(z_{kn}) = f_k(z_{kn})$, а

$$\| g_q \|_\infty \leqslant \sup_{k\geqslant 1} \| f_k \|_\infty \sup_{\|l\|_1 \leqslant 1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\partial\Omega_k} \left| \frac{f(z)}{B(z)} \right| \frac{|dz|}{2\pi} \leqslant \frac{q}{q-1} A_1 \left(\frac{8}{\delta^2} \right)^{N+1} \times$$

$$\times \operatorname{const} \cdot \delta \left(1 + 2\log\frac{1}{\delta} \right) \sup_{k\geqslant 1} \| f_k \|_\infty.$$

Из семейства функций $\{g_q\}$, $q \geqslant 1$, выберем сходящуюся подпоследовательность, предел которой обозначим через f

$$\| f \|_\infty \leqslant 4A \frac{8^N}{\delta^{2N+1}} \left(1 + 2\log\frac{1}{\delta} \right) \sup_{k\geqslant 1} \| f_k \|_\infty.$$

Если $f \equiv f_k$, то условие равенства значений функций f и f_k и их производных в точке z_k, очевидно, выполнено. Если же $f \not\equiv f_k$, то при достаточно малых $t > 0$ $\varepsilon = \inf_{|z-z_k|=t} |f(z) - f_k(z)| > 0$. Выберем номер q столь большим, что $\| g_q - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ и $t > \frac{1}{q}$. При этом дополнительные узлы интерполяции $z_{k1}, \ldots, z_{kN}$ лежат внутри окружности $|z - z_k| = t$ согласно выбору этих точек, т. е. функция $f_k - g_q$ имеет в круге $|z - z_k| < t$ по крайней мере $N + 1$ нуль. Из равенства $f - f_k = (f - g_q) + (g_q - f_k)$ следует, что $|f_k(z) - g_q(z)| > \frac{\varepsilon}{2}$ при $|z - z_k| = t$, откуда $|f_k - g_q| > |f - g_q|$ при этих z. По теореме Руше функция $f - f_k$ имеет в круге $|z - z_k| < t$ столько же нулей, сколько $f_k - g_q$. Так как это верно при всех достаточно малых $t > 0$, то кратность нуля z_k функции $f - f_k$ не меньше $N + 1$, что влечет равенство значений функций f и f_k и их производных до N-го порядка включительно в точке z_k.

1. Васюнин В. И. Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1978, 130, *5—49*.
2. Никольский Н. К. Базисы из инвариантных подпространств и операторная интерполяция.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1978, 130, *50—123*.
3. Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions.— Amer. J. Math., 1958, 80, 4, *921—930*.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М. : Мир, 1975. *448*.
5. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, 312.
6. Виноградов С. А., Хавин В. П. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций.— Зап. науч. семинара ЛОМИ, 1974, 47, *15—54*.
7. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980, *384*.

Ленинградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
27.01.1981 г.