УДК 517.946

В. А. Сердюк

Общие эллиптические граничные задачи, правые части которых негладко вырождаются

Работа посвящена исследованию общих эллиптических граничных задач, правые части которых негладко вырождаются степенным образом вдоль гладкого многообразия γ любой размерности, меньшей чем размерность пространства. Такие задачи в случае гладкого вырождения исследовались ранее в [1—3]. Наша методика является развитием методики работ [1, 2], она основывается на теореме о полном наборе изоморфизмов, доказанной в [4] (см. также [5], гл. 3, § 5).

Рассмотрим в ограниченной области $G \subset R^n$ с границей ∂G эллиптическую граничную задачу

$$(Lu)(x) = \sum_{|\mu| \leqslant 2m} a_\mu(x) D^\mu u(x) = f(x), \quad x \in G,$$
$$(B_j u)(x) = \sum_{|\mu| \leqslant m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu u(x) = \varphi_j(x), \quad x \in \partial G, \tag{1}$$

$j = 1, \ldots, m$, $m_j \leqslant 2m - 1$, $D^\mu = D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$, $D_k = \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n$.

Эллиптичность задачи означает, что L правильно эллиптично, а $\{B_1, \ldots, B_m\}$ его накрывают.

Функции $\varphi_j(x)$, $x \in \partial G$, $j = 1, \ldots, m$, предполагаются для простоты достаточно гладкими, функция $f(x)$ негладко вырождается вдоль некоторого достаточно гладкого многообразия $\gamma \subset G$ размерности $n - i$, $i = 1, 2, \ldots, \ldots, n - 1$. Последнее означает, что в G можно выбрать окрестность G_1 многообразия γ такую, что

$$f(x) = h(x)(\rho(x))^{-\alpha}, \tag{2}$$

где $x \in G$, $h(x) \in L_{p'}(G)$, $\alpha > 0$, $\rho(x)$ — гладкая положительная функция, равная при $x \in G_1$ расстоянию x до γ.

Предположим, что через каждую точку $x \in G \setminus \gamma$ проходит единственная нормаль к γ, лежащая в G_1 и $G_1 = E_r \times \gamma$, где E_r — i-мерный шар радиуса r. Пусть в G_1 введены локальные координаты $x = (y, t)$, $(y, 0) = (y_1, \ldots, y_i, 0, \ldots, 0)$ — координаты точек на E_r, а $(0, t) = (0, \ldots, 0, t_1, \ldots, t_{n-i})$ — точек пересечения γ и гиперплоскости, ортогональной к γ и проходящей через точку x. Тогда $\rho(x) = |y|$, $x \in G_1$.

Введем функциональные пространства. $H^{s,p}(G)$, $1 < p < \infty$, $s \geqslant 0$, — пространство лиувиллевских классов (бесселевых потенциалов). Например, в [6] оно обозначается $L_p^s(G)$. В случае целых $s \geqslant 0$ — это пространство Соболева. $H^{-s,p'}(G)$, $s \geqslant 0$, $1/p + 1/p' = 1$, — пространство, сопряженное к $H^{s,p}(G)$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(G)$; $\|\cdot\|_{s,p}$ — норма в $H^{s,p}(G)$, $s \in R$. $B^{s,p}(\partial G)$, $s \in R$, — пространство Бесова; $B^{s,p}(\partial G)$ и $B^{-s,p'}(\partial G)$ — взаимно сопряженные относительно расширения скалярного произведения в $L_2(\partial G)$, $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_{s,p}$ — норма в $B^{s,p}(\partial G)$.

Для любого целого s и $p \in (1, \infty)$ обозначим через $\widetilde{H}^{s,p}(G)$ пополнение множества $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$\left(\|u\|_{s,p}^p + \sum_{j=1}^{2m} \langle\langle D_\nu^{j-1} u \rangle\rangle_{s-j+1-1/p,p}^p\right)^{1/p} \tag{3}$$

$\left(D_\nu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \nu}\right.$, ν — орт внутренней нормали к $\left.\partial G\right)$. Для нецелых s $\widetilde{H}^{s,p}(G)$ вводится с помощью интерполяции. Если $s \geqslant 2m$, то $\widetilde{H}^{s,p}(G) = H^{s,p}(G)$, (нормы в них эквивалентны). Пространства $\widetilde{H}^{s,p}(G)$ изучены в [7].

Для каждого действительного s и $1 < p < \infty$ замыкание $\widetilde{A}_{s,p}$ отображения $u \to (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u)$, $u \in C^\infty(\overline{G})$, непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{2m+s,p}(G)$ в $K_{s,p}(G, \partial G) = H^{s,p}(G) \times \Pi B^{2m+s-m_j-1/p,p}(\partial G)$ (см. [4]).

Если задача (1) эллиптическая, то в случае отсутствия дефекта $\widetilde{A}_{s,p}$ устанавливает изоморфизм

$$\widetilde{H}^{2m+s,p}(G) \to K_{s,p}(G, \partial G), \quad s \in R, \quad 1 < p < \infty. \tag{4}$$

Если дефект отличен от нуля, то сужение оператора $\widetilde{A}_{s,p}$ устанавливает изоморфизм между соответствующими подпространствами пространств (4) с конечными дефектами, не зависящими от s и p (см. [7] или [5], гл. 3, §5).

Функцию $u \in \bigcup_{s=-\infty}^{\infty} \widetilde{H}^{s,p}(G)$ будем называть решением задачи (1), если

$$Lu = f, \quad B_j u|_{\partial G} = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

где $f \in \bigcup_{s=-\infty}^{\infty} \widetilde{H}^{s,p}(G)$ — регуляризация функции $f(x)$.

Лемма 1. *Если* $0 < \alpha < i/p$, $h(x) \in L_{p'}(G)$, $1 < p' < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, *то* $f(x) = h(x)((\rho(x)))^{-\alpha} \in L_t(G)$, *где* $1 < t < p'i/(p'\alpha + i)$, *и справедлива оценка* $\| f \|_t \leqslant c_t \| h \|_{p'}$.

Доказательство. Используя неравенство Гельдера, имеем для любых $t > 1$ и $q > 1$, $1/q + 1/q' = 1$:

$$\| f \|_t = \Big(\int_G | h(x) |^t (\rho(x))^{-\alpha t} dx \Big)^{1/t} \leqslant \Big(\int_G | h(x) |^{tq} dx \Big)^{1/tq} \Big(\int_G (\rho(x))^{-\alpha t q' \cdot dx} \Big)^{1/tq'}. \quad (6)$$

Подберем t и q так, чтобы $tq = p'$, $tq' = (1 - \varepsilon)/\alpha$, где $\varepsilon \in (0, i)$. Тогда $t(\varepsilon) = p'(i - \varepsilon)/i - \varepsilon + p'\alpha)$, и так как $t(\varepsilon)$ непрерывная и монотонно убывающая на $(0, i)$, то в (6) можно положить $1 < t < t(0+) = p'i/(p'\alpha + i)$. При этом $q > 1$. Тогда из (6) следует, что $\| f \|_t \leqslant c_t \| h \|_{p'}$. Лемма доказана.

Вследствие предполагаемой достаточной гладкости функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, $(f(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \in K_{0,t}(G, \partial G)$, $1 < t < p'i/(p'\alpha + i)$. Тогда из (4) вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Если* $0 < \alpha < i/p$, *то в случае отсутствия дефекта задача* (1) *с* $f(x) = h(x)(p(x))^{-\alpha}$, $\varphi_j(x) \in B^{2m - m_j - 1/t, t}(\partial G)$ *разрешима в* $H^{2m,t}(G)$, $1 < t < p'i/(p'\alpha + i)$.

Если $i/p + k \leqslant \alpha < i/p + k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то определим регуляризацию f функции $f(x)$ формулой

$$(f, v) = \int_{G/G_1} f(x) \overline{v(x)} \, dx + \int_{G_1} f(y, t) \overline{\Big(v(y, t) - \sum_{|\beta| \leqslant k} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta v(0, t) y^\beta \Big)} dy dt, \quad (7)$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_i)$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_i$, $\beta! = \beta_1! \dots \beta_i!$, $\partial^\beta = \Big(\frac{\partial}{\partial y_1}\Big)^{\beta_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)^{\beta_i}$, $y^\beta = y_1^{\beta_1} \dots y_i^{\beta_i}$.

Лемма 2. *Если* $i/p + k \leqslant \alpha < i/p + k + 1$ *и* f — *определенная равенством* (7) *регуляризация функции* $f(x) = h(x)(\rho(x))^{-\alpha}$, *то* $f \in \widetilde{H}^{-(\alpha+\varepsilon), p'}(G)$ ($\varepsilon > 0$, *как угодно мало*) *и справедлива оценка* $\| f \|_{-\alpha - \varepsilon, p'} \leqslant c_\varepsilon \| h \|_{p'}$.

Доказательство. Рассмотрим для $v \in C^\infty(G)$ выражение

$$R_v = \int_{G_1} f(y, t) \Big| v(y, t) - \sum_{|\beta| \leqslant k} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta v(0, t) y^\beta \Big| dy dt.$$

Если $s \geqslant 0$ целое, то интегрируя по t неравенство

$$\| v(\cdot, t) \|^p_{H^{s,p}(E_r)} \leqslant \int_{E_r} \sum_{|\omega| \leqslant s} | D^\omega v |^p \, dy,$$

получаем

$$\int_\gamma \| v(\cdot, t) \|^p_{H^{s,p}(E_r)} dt \leqslant \| v(y, t) \|^p_{H^{s,p}(G_1)}. \quad (8)$$

С помощью интерполяционной теоремы убеждаемся, что (8) справедливо и для нецелых $s > 0$ [2].

По теоремам вложения С. Л. Соболева

$$\| v(\cdot, t) \|_{C^{k+\delta}(E_r)} \leqslant c \| v(\cdot, t) \|_{H^{k+\delta+i/p+\varepsilon_1, p}(E_r)}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_1 > 0$ можно считать сколь угодно малым.

Из определения нормы пространства $C^{k+\delta}(E_r)$, $0 < \delta < 1$, и (9) следует, что

$$\Big| v(y, t) - \sum_{|\beta| \leqslant k} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta v(0, t) y^\beta \Big| \leqslant c \| v(\cdot, t) \|_{C^{k+\delta}(E_r)} | y |^{k+\delta} \leqslant$$
$$\leqslant c \| v(\cdot, t) \|_{H^{k+\delta+i/p+\varepsilon_1, p}(E_r)} | y |^{k+\delta}. \quad (10)$$

Тогда применяя теорему Фубини и учитывая (9), имеем

$$|R_v| \leqslant c \left| \int_{E_r} |y|^{-\alpha+k+\delta} dy \int_{\gamma} h(y, t) \| v(\cdot, t) \|_{H^{k+\delta+i/p+\varepsilon_1, p}(E_r)} dt. \right. \qquad (11)$$

Положим $\delta = \alpha - k - i/p + \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 > 0$ как угодно мало, тогда $|y|^{-\alpha+k+\delta} \in L_p(E_r)$.

Интегральный оператор с ядром $h(y, t) \in L_{p'}(G_1)$ непрерывно действует из $L_p(\gamma)$ в $L_{p'}(E_r)$, $1/p + 1/p' = 1$, тогда из (11) по неравенству Гельдера получаем

$$|R_v| \leqslant c \| |y|^{-\alpha+k+\delta} \|_{L_p(E_r)} \left(\int_{\gamma} \| v(\cdot, t) \|^p_{H^{k+\delta+i/p+\varepsilon_1, p}(E_r)} dt \right)^{1/p}.$$

Учитывая (8), имеем $|R_v| \leqslant c \| v(y, t) \|_{H^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2, p}(G_1)}$, тогда $|(f, v)| \leqslant c \| v(y, t) \|_{H^{\alpha+\varepsilon, p}}(G)$, отсюда $f \in H^{-(\alpha+\varepsilon), p'}(G)$. Лемма доказана. Из этой леммы и теоремы о полном наборе изоморфизмов (см. [4] или [5]) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $i/p + k \leqslant \alpha < i/p + k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *и* f — *определенная формулой* (7) *регуляризация функции* $f(x) = h(x)(\rho(x))^{-\alpha}$, *то при отсутствии дефекта задача* $Lu = f$, $B_j u|_{\partial G} = \varphi_j \in B^{2m-\alpha-m_j-1/p', p'}(\partial G)$ *разрешима в* $\widetilde{H}^{2m-(\alpha+\varepsilon), p'}(G)$ ($\varepsilon > 0$, *как угодно мало*).

Когда дефект отличен от нуля, теоремы 1,2 остаются справедливыми, если $(f, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ удовлетворяет конечному числу условий типа ортогональности.

Теорема о полном наборе изоморфизмов в сочетании с леммами 1 и 2 дает возможность оценить порядок особенности решения задачи (1).

Пусть, например, $i/p + k \leqslant \alpha < i/p + k + 1$, тогда по лемме 2 $(f, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) \in K_{-(\alpha+\varepsilon), p'}(G, \partial G)$, где f — определенная формулой (7) регуляризация функции $f(x)$. Тогда по теореме 2 решение задачи (1) $u(x) \in \widetilde{H}^{2m-\alpha-\varepsilon, p'}(G)$.

Вычислим $L(\rho u)$. Пронеся ρ с помощью леммы 2 убеждаемся, что $\rho u \in \widetilde{H}^{1+2m-\alpha-\varepsilon, p'}(G)$. Затем вычисляем $L(\rho^2 u)$ и т. д. Продолжая эти рассуждения и используя теорему вложения, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $u \in \widetilde{H}^{2m-\alpha-\varepsilon, p'}(G)$ — *решение задачи* (5), *где* f — *указанная выше регуляризация функции* $f(x) = h(x)(\rho(x))^{-\alpha}$ $(h(x) \in L p'(G))$, $\varphi_j \in H^{2m-\alpha+k_0-1/p', p'}(\partial G)$, $j = 1, \ldots, m$, k_0 — *наименьшее целое число, превышающее* $-2m + \alpha + n/p'$, *тогда* $\rho^{k_0} u|_{\bar{G}} \in C^{\beta}(G)$, *где* $0 < \beta < 2m + k_0 - \alpha - n/p'$.

Для простоты предполагается, что $\varphi_j(x)$, $j=1, \ldots, m$, достаточно гладкие. Однако приведенная методика позволяет рассматривать случай, когда $\varphi_j(x)$ имеют негладкое вырождение вдоль некоторого i-мерного $i = 1, 2, \ldots, n-2$, подмногообразия границы области.

1. *Ройтберг Я. А.* О разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений при наличии степенных особенностей в правых частях.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, 3, *412—418*.
2. *Костарчук Ю. В.* Общие эллиптические граничные задачи со степенными особенностями в правых частях.— Укр. мат. журн., 1973, 25, 6, *798—803*.
3. *Красовский Ю. П.* Дифференциальные свойства решений эллиптических граничных задач со степенными особенностями в правых частях.— Изв. АН СССР. Сер. математики, 1971, 35, 1, *202—208*.
4. *Ройтберг Я. А.* Теоремы о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными.— Мат. сб., 1970, 83, 2, *181—213*.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965, *798*.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969, *480*.

7. *Ройтберг Я. А.* О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений.— Мат. сб., 1971, **86**, 2, *248—267*.

Черниговский
педагогический институт

Поступила в редакцию
04.07.1977 г.