УДК 518:517.948

Н. Я. Тихоненко

К приближенному решению двусторонних краевых задач теории аналитических функций

Пусть L — единичная окружность с центром в начале координат, разбивающая комплексную плоскость на две области: внутреннюю $D^+ \ni z = 0$ и внешнюю D^-. Требуется найти аналитические соответственно в D^+ и D^- функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ $(F^-(\infty) = 0)$ по одному из следующих краевых условий:

$$KF \equiv F^+(t) - a(t) F^-(t) = h(t), \ t \in L; \tag{1}$$

$$MF \equiv F^+(t) - a(t) F^-(t) - b(t) \overline{F^-(t)} = h(t), \ t \in L; \tag{2}$$

$$NF \equiv a(t) F^+(t) + b(t) \overline{F^+(t)} - c(t) F^-(t) - d(t) \overline{F^-(t)} = h(t), \ t \in L, \tag{3}$$

в предположении, что $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $h(t) \in H_\lambda$, $0 < \lambda < 1$. Кроме того, в случае (1), (2) предполагаем, что $a(t) \neq 0$, а в задаче (3) $\delta(t) = \overline{a(t)}\, c(t) - b(t)\, \overline{d(t)} \neq 0$. Теория задач (1)—(3) при данных предположениях относительно их коэффициентов построена в [1, 2].

Как правило, построение точного решения задачи (1) вызывает значительные затруднения [1]. Методы построения решений задач (2), (3) до настоящего времени вообще не разработаны. Это требует разработки методов построения приближенного решения задач (1)—(3). Как правилс [3], приближенные решения задачи (1) строятся по известным формулам посредством приближенного вычисления интегралов типа Коши с определенными плотностями. Что же касается задач (2), (3), то нам не известны работы, посвященные их точному или приближенному решениям. В настоящей статье методами коллокаций и редукции строятся приближенные решения задач (1)—(3) и доказывается сходимость их приближенных решений к их точным решениям в пространствах H_β, $0 < \beta < \lambda$.

Сформулируем несколько предложений, используемых в дальнейшем. Обозначим через P_n проектор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t) \in H_\beta$ ее интерполяционный многочлен

$$P_n(\varphi)(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k, \ a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \varphi(t_j)\, t_j^{-k}, \ k = \overline{-n, n}, \tag{4}$$

по узлам

$$t_j = e^{\frac{2\pi i}{2n+1} j}, \quad j = \overline{-n, n}. \tag{5}$$

Через S_n обозначим проектор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t) \in H_\beta$ отрезок ее ряда Фурье

$$(S_n \varphi)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k t^k, \tag{6}$$

где φ_k — коэффициенты ряда Фурье функции $\varphi(t)$.

Тогда на основании работы [4] следует такая лемма.

Лемма. *Если* $\varphi(t) \in H_\lambda$ *на* L *и* $0 < \beta < \lambda$, *то*

$$\|\varphi(t) - (P_n\varphi)(t)\|_{H_\beta} \leqslant d_1 n^{\beta-\lambda} \ln n \|\varphi(t)\|_{H_\lambda}; \quad (7)$$

$$\|\varphi(t) - (S_n\varphi)(t)\|_{H_\beta} \leqslant d_2 n^{\beta-\lambda} \ln n \|\varphi(t)\|_{H_\lambda}. \quad (8)$$

Здесь и ниже d_i — вполне определенные постоянные, не зависящие от n.

Предположим, что индекс задач (1)—(3) равен нулю, т. е. в случае задач (1), (2) $\varkappa = \operatorname{ind} a(t) = 0$, а в случае задачи (3) $\varkappa = \operatorname{ind} \delta(t) = 0$. Тогда задача (1) имеет единственное решение, принадлежащее на L пространству H_λ и исчезающее на бесконечности. Для задач (2), (3) необходимо выполнение дополнительных условий, которые мы укажем ниже.

Опишем пространства решений $F(t)$ задач (1) — (3), которые будем искать в виде пары $F(t) = \{F^+(t); F^-(t)\}$, первый элемент которой — краевое значение функции, аналитической в D^+, а второй — краевое значение функции, аналитической в D^- и имеющей на бесконечности нуль по крайней мере первого порядка, причем $F^\pm(t) \in H_\beta$. Тогда в качестве пространства решений задач (1) — (3) возьмем пространство всевозможных пар $\{F^+(t); F^-(t)\}$, свойства элементов которых описаны выше. Норму в пространстве X определим так: $\|F(t)\|_X = \|F^+(t)\|_{H_\beta} + \|F^-(t)\|_{H_\beta}$, пространство $\widetilde{X}$ приближенных решений задач (1) — (3) — так: $F_n(t) \in \widetilde{X}$, если $F_n(t) = \{F_n^+(t); F_n^-(t)\}$. При этом

$$F_n^+(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k, \quad F_n^-(t) = \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k. \quad (9)$$

Ясно, что $\widetilde{X} \subset X$ является полным в X.

Метод коллокаций. Приближенное решение задачи (1) ищем в виде (9). Подставив (9) в (1), неизвестные α_k определим из условия совпадения интерполяционных многочленов (4) левой и правой частей полученного выражения в узлах (5), т. е. α_k находим из системы

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t_j^k - a(t_j) \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t_j^k = h(t_j), \quad j = \overline{-n, n}. \quad (10)$$

Покажем, что система (10) разрешима. Согласно [5] для разрешимости системы (10) достаточно показать выполнение неравенства $\|KF_n - P_nKF_n\|_{H_\beta} \leqslant \varepsilon \|F_n(t)\|_X$, где K — линейный оператор, определяемый равенством (1) и действующий из пространства X в пространство H_β. Согласно лемме $\varepsilon = d_3 n^{\beta-\lambda} \ln n$. Тогда на основании работы [5] система (10) разрешима при всех n, удовлетворяющих неравенству

$$d_4 n^{\beta-\lambda} \ln n < 1, \quad (11)$$

а приближенное решение $F_n(t) = \{F_n^+(t); F_n^-(t)\}$ задачи (1) стремится в пространстве X к ее точному решению $F(t) = \{F^+(t); F^-(t)\}$ со скоростью

$$\|F(t) - F_n(t)\|_X \leqslant d_5 n^{\beta-\lambda} \ln n. \quad (12)$$

При этом функции $F_n^\pm(t)$ в пространстве H_β стремятся к функциям $F^\pm(t)$ со скоростью

$$\|F^\pm(t) - F_n^\pm(t)\|_{H_\beta} \leqslant d_6^\pm n^{\beta-\lambda} \ln n. \quad (13)$$

Предполагаем, что в случае задачи (2) выполнены условия $|a(t)| > |b(t)|$ или $|a(t)| = |b(t)| \neq 0$. Тогда задача (2) при $\varkappa = 0$ имеет единственное решение. Приближенное решение задачи (2) ищем в виде (9), а неизвестные α_k определяем из системы

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t_j^k - a(t_j) \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t_j^k - b(t_j) \sum_{k=-n}^{-1} \overline{\alpha_k} t_j^{-k} = h(t_j), \quad j = \overline{-n, n}. \quad (14)$$

Для разрешимости системы (14) достаточно показать выполнение неравенства $\| MF_n - P_nMF_n \|_{H_\beta} \leqslant \varepsilon_1 \| F_n \|_X$. Легко видеть, что оператор M представим в виде суммы линейного и антилинейного операторов (A — антилинейный, если он удовлетворяет таким условиям: 1) $\forall x_1 x_2 \in X A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$; 2) $\forall x \in X \forall \lambda A(\lambda x) = \bar{\lambda} A(x)$). Легко показать, что для таких операторов справедливы все утверждения работы [5]. Учитывая, что $\| \overline{\varphi(t)} \|_{H_\beta} = \| \varphi(t) \|_{H_\beta}$, если $\varphi(t) \in H_\beta$, получаем $\varepsilon_1 = d_7 n^{\beta-\lambda} \ln n$. Тогда система (14) разрешима при всех n, удовлетворяющих неравенству

$$d_8 n^{\beta-\lambda} \ln n < 1. \tag{15}$$

При этом приближенное решение задачи (2) стремится в пространстве H_β к ее точному решению со скоростью

$$\| F^{\pm}(t) - F_n^{\pm}(t) \|_{H_\beta} \leqslant d_9^{\pm} n^{\beta-\lambda} \ln n. \tag{16}$$

Задачу (3) рассматриваем при выполнении условий:

1) $(|a(t)| - |b(t)|)(|c(t)| - |d(t)|) > 0$; 2) $|c(t)| = |d(t)| > 0, |a(t)| - |b(t)| \neq 0$, $\operatorname{ind} \beta(t) \geqslant 0$; 3) $|a(t)| = |b(t)| > 0$, $|c(t)| - |d(t)| \neq 0$, $\operatorname{ind} \beta(t) \leqslant 0$; 4) $|a(t)| = |b(t)| > 0$, $|c(t)| = |d(t)| > 0$, $\operatorname{ind} \beta(t) \leqslant 0$,

где $\beta(t) = t[\overline{a(t)}\,dt - b(t)\,\overline{c(t)}]$. Тогда при выполнении условий 1) — 4) при $\varkappa = 0$ задача (3) имеет единственное решение, принадлежащее H_λ.

Приближенное решение задачи (3) ищем в виде (9), а неизвестные α_k определяем из системы

$$a(t_j) \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t_j^k + b(t_j) \sum_{k=0}^{n} \bar{\alpha}_k t_j^{-k} - c(t_j) \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t_j^k -$$

$$- d(t_j) \sum_{k=-n}^{-1} \bar{\alpha}_k t_j^{-k} = h(t_j), \quad j = \overline{-n, n}. \tag{17}$$

Система (17) разрешима при всех n, удовлетворяющих условию

$$d_{10} n^{\beta-\lambda} \ln n < 1. \tag{18}$$

При этом

$$\| F^{\pm}(t) - F_n^{\pm}(t) \|_{H_\beta} \leqslant d_{11}^{\pm} n^{\beta-\lambda} \ln n. \tag{19}$$

Теорема 1. *Если функции* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $h(t)$ *удовлетворяют всем указанным выше условиям, то системы* (10), (14), (17), *разрешимы соответственно при выполнении неравенств* (11), (15), (18), *при этом приближенные решения задач* (1)—(3) *стремятся в пространстве* H_β *к их точным решениям соответственно со скоростями* (13), (16), (19).

Теорема 2. *Если функции* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $h(t) \in H_\lambda^{(r)}$, $r \geqslant 0$, *и удовлетворяют всем указанным выше условиям, то системы* (10), (14), (17) *разрешимы при всех* n, *удовлетворяющих неравенству* $d_{12} n^{\beta-\lambda-r} \ln n < 1$, *а приближенные решения задач* (1) — (3) *стремятся в пространстве* H_β *к их точным решениям со скоростью* $\| F^{\pm}(t) - F_n^{\pm}(t) \|_{H_\beta} \leqslant d_{13}^{\pm} n^{\beta-\lambda-r} \times \ln n$.

Метод редукции. Приближенные решения задач (1) — (3) ищем в виде (9), где α_k — коэффициенты Фурье функций $F^+(t)$, $F^-(t)$. При этом α_k определяем соответственно из систем

$$r_j \alpha_j - \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k a_{k_j} = h_j, \quad j = \overline{-n, n}; \tag{20}$$

$$r_j \alpha_j - \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k a_{kj} - \sum_{k=-n}^{-1} \bar{\alpha}_k b_{kj} = h_j, \quad j = -\overline{n, n}; \tag{21}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_{kj} + \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha}_k b_{kj} - \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k c_{kj} - \sum_{k=-n}^{-1} \overline{\alpha}_k d_{kj} = h_j, \quad j = -\overline{n, n}, \qquad (22)$$

где $r_j = 1$, $j \geqslant 0$; $r_j = 0$, $j < 0$; a_{kj}, b_{kj}, c_{kj}, d_{kj}, h_j — коэффициенты рядов Фурье соответственно функций $a(t)t^k$, $b(t)t^{-k}$, $c(t)t^k$, $d(t)t^{-k}$, $h(t)$. Разрешимость систем (20) — (22) доказывается так же, как и разрешимость систем (10), (14), (17), при этом утверждения теорем 1 и 2 сохраняют силу.

Замечание 1. Следуя [6], данными методами можно построить приближенные решения задач (1)—(3) и в тех случаях, когда соответствующие им однородные задачи имеют нетривиальные решения.

Замечание 2. В случае нетеровых задач (2), (3) мы рассмотрели так называемые устойчивый и вырожденные случаи. Если таковые не выполняются, но задачи (2), (3) нетеровы и безусловно разрешимы, то их приближенные решения строятся по приведенным выше схемам.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. *640*.
2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. *448*.
3. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1968, *426*.
4. *Габдулхаев Б. Г.* Аппроксимация в H-пространствах и приложения.— Докл. АН СССР, 1975, 223, 6, *1293—1296*.
5. *Габдулхаев Б. Г.* Некоторые вопросы теории приближенных методов.— Изв. вузов. Математика, 1968, 9, *16—28*.
6. *Тихоненко Н. Я.* Приближенное решение двухэлементных краевых задач со сдвигом.— Укр. мат. журн., 1977, 29, 1, *77—88*.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию
30.05.1980 г.