УДК 519.41/47

А. Н. Тузов

Об абелевом нормальном делителе группы, все сервантные подгруппы которого дополняемы в ней

В настоящей заметке получены необходимые и достаточные условия дополняемости сервантных подгрупп абелева нормального делителя [1] и описаны RI^*-группы, в которых дополняемы сервантные подгруппы максимальных абелевых нормальных делителей [2].

Определение 1 (см. [1]). Прямое произведение абелевых групп называется сервантно замкнутым, если оно обладает следующими свойствами:

1) его произвольный множитель изоморфен какой-нибудь подгруппе квазициклической группы или аддитивной группы рациональных чисел;

2) если это прямое произведение содержит неполные множители без кручения, то число таких множителей конечно и все они изоморфны между собой;

3) ни для одного простого числа p из множителей этого прямого произведения нельзя составить бесконечной последовательности циклических p-групп с неограниченно возрастающими порядками.

Определение 2. Сервантно замкнутое разложение назовем сервантно замкнутым разложением первого рода если оно содержит не более одного неполного члена без кручения, либо все такие члены имеют тип, содержащий характеристику $(\infty, \ldots, \infty, 0, \infty, \ldots)$.

Если сервантно замкнутое разложение не является сервантно замкнутым разложением первого рода, назовем его сервантно замкнутым разложением второго рода.

В дальнейшем нам понадобятся теоремы 5—7 из работы [1].

Лемма 1. *Пусть абелева группа G обладает сервантно замкнутым разложением S. В группе G для каждой отличной от G сервантной подгруппы тогда и только тогда существует дополнение, являющееся произведением некоторого множества групп из разложения S, когда S — сервантно замкнутое разложение первого рода.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что абелева группа G обладает сервантно замкнутым разложением S второго рода и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ $(l \geqslant 2)$ — неполные члены без кручения этого разложения. Покажем, что в группе G найдется такая собственная сервантная подгруппа, ни одно дополнение которой не является произведением групп из разложения S.

Так как S — сервантно замкнутое разложение второго рода, то тип групп Q_i содержит характеристику $\alpha = (\ldots 0 \ldots 0 \ldots)$ (нули в этой характеристике соответствуют простым числам p_k и p_n).

Если $a_1 \in Q_1$ и $a_2 \in Q_2$ — элементы, имеющие характеристику α, то уравнения $x^{p_k} = a_i$ и $x^{p_n} = a_i$ $(i = 1, 2)$ неразрешимы в группах Q_i.

Возьмем элемент $a_1^{p_k} a_2^{p_n} \in Q_1 \times Q_2$ и рассмотрим порожденную им сервантную подгруппу $C = \{x \mid x^r = (a_1^{p_k} a_2^{p_n})^m, \ r, m \in Z\}$. Допустим, подгруппа C обладает в группе G дополнением, составленным из членов сервантно замкнутого разложения S. Тогда C дополняема в $Q_1 \times Q_2$ одной из подгрупп — Q_1 или Q_2. Пусть, например, дополнением является подгруппа Q_2. Так как $a_1 \in Q_1 \times Q_2$, то подгруппа C должна содержать элемент $a_1 b$, где $b \in Q_2$. Значит, $(a_1 b)^r = (a_1^{p_k} a_2^{p_n})^m$, т. е. $a_1^r = a_1^{mp_k}$ и $b^r = a_2^{mp_n}$. Группа Q_1 не имеет кручения, поэтому $r = mp_k$ и $b^{mp_k} = a_2^{mp_n}$, т. е. $b^{p_k} = a_2^{p_n}$. Так как p_n и p_k — различные простые числа, то $vp_n + wp_k = 1$ для некоторых v и w. Но тогда $(b^v a_2^w)^{p_l} = a_2$, т. е. уравнение $x^{p_k} = a_2$ разр ешимо — противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть абелева группа G обладает сервантно замкнутым разложением S первого рода. Покажем, что произвольная собственная сервантная подгруппа C группы G обладает в G таким дополнением, которое является произведением некоторого множества групп из разложения S.

Согласно [1, теорема 6] можно ограничиться случаем, когда разложение S содержит неполные множители без кручения $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ $(l \geqslant 2)$. Обозначим через P периодическую часть группы G, а через R — произведение тех членов разложения S, которые не имеют кручения. Очевидно, $G = P \times R$. Периодическая часть $C \cap P$ подгруппы C сервантна в P и [1, теорема 6] обладает в группе P таким дополнением D_1, которое либо тривиально, либо — произведение некоторого множества групп из разложения S. Проекция K подгруппы C на подгруппу R сервантна в R. Пусть H — полная часть группы R. Полная часть $K \cap H$ подгруппы K сервантна в H и [1, теорема 6] обладает в H таким дополнением D_2, которое либо тривиально, либо — произведение некоторого множества групп из разложения S. Проекция K_1 подгруппы K на подгруппу $Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_l$ сервантна в Q.

Покажем, что K_1 обладает в Q таким дополнением, которое либо тривиально, либо — произведение некоторых групп Q_i.

Очевидно, интерес представляет лишь случай, когда K_1 — собственная подгруппа группы Q. В этом случае K_1, как сервантная подгруппа вполне разложимой группы, разлагается в прямое произведение $K_1 = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_t$ групп ранга 1. Подгруппа A_1 обладает в Q таким дополнением, которое является произведением некоторого множества групп Q_i. Действительно, $A_1 = \{x \mid x^r = (b_1 b_2 \ldots b_l)^m, \ b_i \in Q_i, \ r, m \in Z\}$ и всякий неединичный элемент b_i имеет характеристику $(\infty, \ldots, \infty, h_i, \infty, \ldots)$. Пусть, для простоты рассуждений, $b_1 \neq 1$ и h_1 — наименьшее из чисел h_i. Следовательно, A_1 имеет тривиальное пересечение с подгруппой $F = Q_2 \times \cdots \times Q_l$. Если $b \in Q_1$ и $b \neq 1$ то, как известно, $b^n = b_1^s$ для некоторых n и s.

Ввиду разрешимости уравнения $x^n = b_1^s$ и минимальности числа h_1, разрешимы и уравнения $x^n = b_2^s, \ldots, x^n = b_l^s$. Значит, существует такое $x_0 \in F$, что $(bx_0)^n = (b_1 b_2 \ldots b_l)^s$, т. е. $bx_0 \in A_1$. Но тогда $b \in A_1 \times F$ и, следовательно, $A_1 \times F = A_1 \times (Q_2 \times \ldots \times Q_l) = Q$.

Рассмотрим подгруппу $A_1 \times A_2$. Очевидно, $A_1 \times A_2 = A_1 \times (F \cap A_1 \times A_2)$. Так как $F \cap A_1 \times A_2$ — сервантная подгруппа ранга 1 группы F, то согласно изложенному выше $F \cap A_1 \times A_2$ обладает в F таким дополнением, которое является произведением некоторого множества групп Q_i. Это дополнение, очевидно, служит дополнением для подгруппы $A_1 \times A_2$ в группе Q.

Теперь выделяем подгруппу $A_1 \times A_2 \times A_3$ и т. д. В результате получаем, что подгруппа K_1 обладает в группе Q дополнением D_3 искомого вида. Заметим, что $D_1 \times D_2 \times D_3$ — дополнение подгруппы C в группе G, а также произведение некоторого множества групп из разложения S. Достаточность доказана. Лемма доказана.

Прежде чем сформулировать теорему напомним, что нормальные подгруппы Q_1 и Q_2 группы G называются G-изоморфными, если существует такой изоморфизм φ подгруппы Q_1 на Q_2, что $(g^{-1}xg)\,\varphi = g^{-1}\,(x\varphi)\,g$ для всех $x \in Q_1$ и $g \in G$.

Теорема 1. *В группе G тогда и только тогда дополняемы все сервантные подгруппы ее абелева нормального делителя N, когда выполняются следующие условия:* 1) *подгруппа N дополняема в G;* 2) *подгруппа N обладает таким сервантно замкнутым разложением S, все члены которого инвариантны в G;* 3) *если S — сервантно замкнутое разложение второго рода, то все его неполные члены без кручения попарно G-изоморфны.*

Доказательство. Необходимость. Достаточно доказать (см. [1, теорема 7]), что если S — сервантно замкнутое разложение второго рода, то его неполные члены без кручения попарно G-изоморфны.

Пусть Q_1 и Q_2 — два неполных члена без кручения разложения S. В группе $Q = Q_1 \times Q_2$ (лемма 1) найдется такая сервантная подгруппа C, которая не дополняема в Q ни подгруппой Q_1, ни подгруппой Q_2. По условию теоремы C обладает в G дополнением D.

Подгруппа $L = D \cap Q$ — дополнение подгруппы C в группе Q, причем L инвариантна в G и имеет ранг 1. Так как подгруппа L отлична и от Q_1, и от Q_2, то она содержит такой элемент ab, что $a \in Q_1$, $b \in Q_2$ и $ab \notin Q_1 \cup Q_2$.

Допустим, a_1 — произвольный неединичный элемент группы Q_1, тогда $a_1^s = a^t$ для некоторых s и t. Если $g \in G$, то $g^{-1}a^t b^t g \in L$ и, значит, $(g^{-1}a^t b^t g)^r = (ab)^m$ для некоторых r и m. Следовательно, $g^{-1}a^{tr}g = a^m$ и $g^{-1}b^{tr}g = b^m$.

Предположим, что $a\varphi = b_1$. Так как $b_1^l = b^n$ для некоторых l и n, то $g^{-1}b_1^{rtl}g = g^{-1}b^{rtn}g = b^{mn} = b_1^{lm}$. А раз Q_2 — группа без кручения, то $g^{-1}b_1^{rt}g = b_1^m$. Это означает, что $g^{-1}\,(a^{rt}\varphi)\,g = a^m\varphi$, т. е. $g^{-1}\,(a^{rt}\varphi)\,g = (g^{-1}a^{rt}g)\,\varphi$. Учитывая, что $a^{rt} = a_1^{rs}$, получаем $(g^{-1}a_1^{rs}g)\,\varphi = g^{-1}\,(a_1^{rs}\varphi)\,g$ и, значит, $(g^{-1}a_1 g)\,\varphi = g^{-1}\,(a_1\varphi)\,g$. Таким образом, подгруппы Q_1 и Q_2 G-изоморфны. Необходимость доказана.

Достаточность. Покажем, что произвольная сервантная подгруппа C нормального делителя N дополняема в G. Так как N дополняем в G, то достаточно показать, что C обладает в N дополнением, инвариантным относительно G. Это справедливо для сервантно замкнутого разложения первого рода (см. лемму 1). Пусть S — сервантно замкнутое разложение второго рода; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ $(l \geqslant 2)$ — его неполные члены без кручения (по условию теоремы они G-изоморфны).

Возьмем произвольную сервантную подгруппу F группы $Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_l$, $a_1 a_2 \ldots a_l$ $(a_i \in Q_i)$ — ее неединичный элемент и $g \in G$. Если $a_j \neq 1$, то, так как $g^{-1}a_j g \in Q_j$, $g^{-1}a_j^r g = a_j^m$ для некоторых r и m.

Пусть при G-изоморфизме φ нормальных делителей Q_j и Q_i элементу a_j соответствует элемент $b_i \in Q_i$. Тогда, очевидно, $g^{-1}b_i^r g = b_i^m$. Так как $a_i^k = b_i^n$ для некоторых k и n, то $g^{-1}a_i^{kr}g = g^{-1}b_i^{nr}g = b_i^{nm} = a_i^{km}$. Но Q_i не имеет кручения, поэтому $g^{-1}a_i^r g = a_i^m$ (для произвольного i). А значит, $(g^{-1}a_1a_2 \ldots a_l g)^r = (a_1a_2 \ldots a_l)^m$, т. е. $g^{-1}a_1a_2 \ldots a_l g \in F$.

Итак, произвольная сервантная подгруппа группы Q инвариантна в G.

Пусть P — периодическая часть группы N и R — произведение тех членов разложения S, которые не имеют кручения. Очевидно, $N = P \times R$. Подгруппа $C \cap P$ сервантна в P и согласно лемме 1 обладает в P инвариантным относительно G дополнением D_1. Если K — проекция подгруппы C на R и H — полная часть группы R, то подгруппа $K \cap H$ сервантна в H и ввиду леммы 1 обладает в H инвариантным относительно G дополнением D_2. Проекция подгруппы K на подгруппу Q обладает в Q дополнением D_3 (см. (1, теорема 5)). Так как подгруппа D_3 сервантна в Q, то она инвариантна в G. Остается заметить, что инвариантная в G подгруппа $D_1 \times D_2 \times D_3$ — дополнение подгруппы C в группе N. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и результатов работы [2] получаем утверждение.

Теорема 2. *В RI^*-группе G тогда и только тогда дополняемы все сервантные подгруппы максимальных абелевых нормальных делителей, когда выполняются следующие условия:* 1) *группа G обладает единственным максимальным абелевым нормальным делителем N;* 2) *подгруппа N дополняема в G;* 3) *подгруппа N обладает таким сервантно замкнутым разложением S, все члены которого инвариантны в G;* 4) *если S — сервантно замкнутое разложение второго рода, то все его неполные члены без кручения попарно G-изоморфны.*

1. Черников С. Н. Группы с системами дополняемых подгрупп.— Мат. сб., 1954, 35, 1, *93—128*.
2. Тузов А. Н. Обобщенно разрешимые группы, в которых дополняемы все сервантные подгруппы максимальных абелевых нормальных делителей.— В кн.: Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. Киев, 1980, *77—85*.

Киевский институт
народного хозяйства

Поступила в редакцию
3.03.1981 г.