УДК 517.928

Г. П. Хома

О теореме Банфи — Филатова

Значительный результат в асимптотической теории представляет собой теорема Банфи—Филатова [1, 2] — обобщение теоремы Боголюбова на случай бесконечного промежутка времени. В данной работе приведем одно обобщение указанной теоремы.

Рассмотрим стандартную систему

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \tag{1}$$

где x и X — n-мерные вектора, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Теорема 1 (Банфи—Филатова [2]). *Пусть функция $X(t, x)$ системы (1) определена в области $\Omega = \{0 \leqslant t < \infty,\ x \in D \subset \mathbf{R}^n\}$ и пусть выполнены условия:* 1) $X(t, x) \in C_t(\Omega) \times \mathrm{Lip}_x(\mu; \Omega)$, $\mu = \mathrm{const}$); 2) *в каждой точке $x \in D$ равномерно относительно t существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} X(t, x)\, dt = X_0(x)$$

и функция $X_0(x)$ *ограничена;* 3) *решение* $y=y(t)$; $y(0)=x(0)$ *усредненной системы*

$$\dot{y}=\varepsilon X_0(y) \tag{2}$$

определено для всех $t\geqslant 0$ *и лежит в области* D *с некоторой* δ*-окрестностью;* 4) *решение* $y=y(\tau)$ $(\tau=\varepsilon t)$ *равномерно асимптотически устойчиво. Тогда* $(\forall\eta:0<\eta<\delta)$ $(\exists\varepsilon_0>0)$ *такое, что при* $\varepsilon>\varepsilon_0$ *для всех* $t\geqslant 0$ *будет* $|x(t)-y(t)|<\mu$.

Рассмотрим действительную автономную систему

$$\dot{y}=f(y), \tag{3}$$

где $f(y)\in C'$ $(\|y\|<H)$ [3]. Заметим, что такой вид имеет усредненная система (2).

Определение 1. *Если* $y=y(t)$ $(a<t<b)$ — *решение системы* (3), *то совокупность точек* $\Gamma=\{y(t):t\in(a,b)\}$ *фазового пространства* $\mathbf{R}_y^n$ *называется траекторией решения.*

Так как система (3) автономна, то наряду с решением $y=y(t)$ она допускает семейство решений $y_c=y(t+c)$, $-\infty<c<\infty$, которые, очевидно, обладают одной и той же траекторией.

Под $\rho(z,\Gamma)$, как обычно, будем понимать расстояние точки $z\in\mathbf{R}_y^n$ до множества $\Gamma\subset\mathbf{R}_y^n$, т. е. $\rho(z,\Gamma)=\inf\limits_{y\in\Gamma}\|z-y\|$.

В дальнейшем для решения $y=y(t)$, $t_0\leqslant t<\infty$, иногда придется рассматривать множество точек $\Gamma^+=\{y(t):t_0\leqslant t<\infty\}$, которые назовем положительной полутраекторией.

Определение 2. *Решение* $\eta=\eta(t)$, $t_0\leqslant t<\infty$, *системы* (3) *называется орбитально устойчивым при* $t\to+\infty$, *если положительные траектории* Γ^+ *всех решений* $y=y(t)$, $t_0\leqslant t<\infty$, *достаточно близких в начальный момент* t_0 *к решению* $\eta(t)$, *в дальнейшем целиком содержатся в* ε*-окрестности* Γ_0^+ *данного решения* $\eta=\eta(t)$, *где* $\varepsilon>0$ *произвольно мало, т. е.* $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta(\varepsilon_0,t_0)>0)$ *такое, что если* $\|y(t_0)-\eta(t_0)\|<\delta$, *то* $\rho(y(t),\Gamma_0^+)<\varepsilon$ *при* $t\geqslant t_0$.

Замечание. В силу свойства зависимости решения от начальных данных (см. [3]), наличие орбитальной устойчивости решения $\eta(t)$, $a<t<\infty$, не зависит от выбора начального момента $t_0\in(a,+\infty)$.

Определение 3. *Орбитально устойчивое решение* $\eta(t)$ *называется асимптотически орбитально устойчивым, если существует* $\Delta_0>0$ *такое, что для всех решений, удовлетворяющих неравенству* $\|y(t_0)-\eta(t_0)\|<\Delta_0$, выполнено предельное соотношение $\rho(y(t),\Gamma_0^+)\to 0$ при $t\to\infty$.

Таким образом, если Γ_0^+ — замкнутая орбитально устойчивая траектория, то достаточно близкие к ней при $t=t_0$ траектории Γ^+ навиваются на нее.

Заметим, что из устойчивости решения очевидно следует его орбитальная устойчивость. Но из орбитальной устойчивости, вообще говоря, не вытекает устойчивость его по Ляпунову, а тем более асимптотическая устойчивость.

Пример [3]. Пусть $\eta(t)$ — периодическое решение с периодом ω, $\omega>0$, автономной системы (3), не сводящейся к постоянной $(\dot{\eta}(t)\not\equiv 0)$. Тогда такое решение не может быть асимптотически устойчивым. Действительно, полагаем $y_\delta(t)=\eta(t+\delta)$. Так как $\eta'(t_0)\neq 0$, при любом достаточно малом $\delta>0$ имеем $\|y_\delta(t_0)-\eta(t_0)\|=h>0$. Отсюда, учитывая ω-периодичность $\eta(t)$ при $T>0$, получаем $\sup\limits_{t>T}\|y_\delta(t)-\eta(t)\|=h>0$. Следовательно, $|y_\delta(t)-\eta(t)|\to 0$ при $t\to\infty$. Однако орбитальная устойчивость периодического решения $\eta(t)$ и даже асимптотическая орбитальная устойчивость могут иметь место.

Определение 4. Условимся, что решение $\eta(t)$ имеет свойство асимптотической фазы (см. [3]), если для каждого решения $y(t)$, удовлетворяющего начальному неравенству $\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \Delta_0$, где $\Delta_0 > 0$ достаточно мало, существует число $c = c(y)$ (асимптотическая фаза) такое, что $\|y(t+c) - \eta(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Лемма. *Орбитально устойчивое решение $\eta(t)$ с асимптотической фазой асимптотически орбитально устойчиво* [3].

Теорема 2. (обобщение теоремы Банфи — Филатова). *Пусть функция $X(t, x)$ системы* (1) *определена в области $\Omega = \{t \geqslant 0,\ x \in D \quad \mathrm{R}^n\}$ и пусть выполнены условия* 1)—4) (*или условия* 1), 2)) *теоремы* 1 (*Банфи—Филатова*) *и условия:* 3′) *через каждую точку $t = 0$, $y(0) \equiv x(0)$ проходит только одно решение усредненной системы* (2); 4′) *решение $y(\tau)$ $(\tau = \varepsilon t)$, $y(0) = x(0)$ усредненной системы* (2) *определено для всех $t \geqslant 0$, лежит в области D с некоторой δ-окрестностью и орбитально устойчиво с асимптотической фазой. Тогда $(\forall \eta : 0 < \eta < \delta)$ $(\exists \varepsilon_0 > 0)$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для всех $t \geqslant 0$ $\|x(t) - y(t)\| < \eta$, где $x(t)$ и $y(t)$ — решения соответственно систем* (1) *и* (2).

Доказательство. Первая часть сформулированной теоремы 2 есть теорема 1 (Банфи—Филатова). Доказательство второй части теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Действительно, пусть $\xi = \xi(t)$ — орбитально устойчивое решение системы (2) с асимптотической фазой. Тогда для любых $\eta/2$ и t существует $\Delta_0 < \eta$ $(\Delta_0 = \Delta_0(\eta/2)$ и не зависит от $\bar{t}$ в силу условий 2) и 3) теоремы 2 и указанного выше замечания) (такое, что для любого решения $y(t)$ уравнения (2), удовлетворяющего в момент $\bar{t}$ неравенству $\|\xi(\bar{t}) - y(\bar{t})\| < \Delta_0$, при $t > \bar{t}$ выполняется неравенство $\|\xi(t) - y(t+c)\| < \eta/2$, где $c = c(y)$ — асимптотическая фаза.

Более того, в силу орбитальной устойчивости решения $\xi(t)$ с асимптотической фазой можно указать такое $\bar{L}$, что при $t > \bar{t} + \bar{L}\varepsilon^{-1}$ $\|\xi(t) - y(t + c)\| < \dfrac{\Delta_0}{2}$. Здесь $\bar{L} = \bar{L}\left(\dfrac{\Delta_0}{2}\right)$, но $\bar{L}$ не зависит от $\bar{t}$.

Далее, полагая $\Delta_0 = \rho$ и повторяя доказательство теоремы из [2], убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Заметим, что аналогичная теорема справедлива и для интегро-дифференциальных уравнений.

1. *Banfi C.* Sull'approssimasione di processi nonstazionari in mecanica non lineare.— Bull. Unione math., ital., 1967, 22, *142—151*.
2. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974. *216*.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. *472*.

Тернопольский
педагогический институт

Поступила в редакцию
04.05.1981 г.