УДК 517.9

Чан Ким Тьи

Асимптотические решения уравнения в частных производных третьего порядка

Резонансный случай. Исследуем квазилинейную краевую задачу для уравнения в частных производных типа

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-b^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-\alpha b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon F\left(\theta, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) \tag{1}$$

с линейными однородными краевыми условиями

$$L_c\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right)\Big|_{x=c}=0, \quad c=0, L. \tag{2}$$

Здесь $u = u(x, t)$, а α, b — постоянные, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, t — время, x — пространственная координата, $d\theta/dt = \gamma = \mathrm{const}$, L_c — линейные однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Функция F предполагается 2π-периодической по θ и может быть представлена в виде

$$F = \sum_{m=-N}^{N} e^{im\theta} f_m\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right). \tag{3}$$

Здесь f_m — целые рациональные функции относительно своих аргументов и достаточно гладкие по x на интервале $[0, L]$.

Допустим, что имеет место резонансное соотношение

$$\Omega_n = b\lambda_n = pq^{-1}\gamma + \varepsilon\sigma, \tag{4}$$

где p, q — взаимно-простые числа, σ — расстройка частот, λ_n — характеристические числа краевой задачи

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad L_c\left(X, \frac{dX(x)}{dx}, \dots\right)\Big|_{x=c} = 0, \quad c = 0, L, \tag{5}$$

и что между Ω_j и Ω_k не существует соотношение типа $n_j\Omega_j + n_k\Omega_k = 0$, $j \neq k$, где n_f, n_k — целые числа. При $\varepsilon = 0$ имеем краевую задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \alpha b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\\ L_c\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right)\Big|_{x=c} = 0, \quad c = 0, L.\end{gathered} \tag{6}$$

Она имеет двупараметрическое семейство решений

$$u_{0n}(x, t) = a_n X_n(x)\cos(\Omega_n t + \Psi_n), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

где, $\Omega_n = b\lambda_n$, $X_n(x)$ — характеристические функции краевой задачи (5), соответствующие характеристическим числам λ_n, и они попарно ортогональны; a_n, ψ_n — произвольные постоянные.

На основании асимптотического метода [1, 2] решение квазилинейной краевой задачи (1), (2) будем искать в виде разложения

$$u(x, t) = aX_n(x)\cos\Phi + \varepsilon u_1(x, a, \Phi, \theta) + \varepsilon^2 u_2(x, a, \Phi, \theta) + \dots . \tag{8}$$

Здесь, $\Phi = pq^{-1}\theta + \psi$, n — определенное натуральное число, выбор которого зависит от конкретной задачи, а функции u_i — 2π-периодические по Φ и θ. Величины a, ψ определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered}da/dt = \varepsilon A_1(a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(a, \psi) + \dots,\\ d\psi/dt = \varepsilon\sigma + \varepsilon B_1(a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(a, \psi) + \dots .\end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (1) с учетом соотношений (9) и краевых условий (2) и приравнивая коэффициенты при ε, получаем краевую задачу для неизвестной функции

$$\begin{aligned}&\left(\Omega_n\frac{\partial}{\partial\Phi} + \gamma\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^3 u_1 + \alpha\left(\Omega\frac{\partial}{\partial\Phi} + \gamma\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 u_1 - b^2\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Omega_n\frac{\partial}{\partial\Phi} + \right.\\ &\left. + \gamma\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u_1 - \alpha b^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = F_0(x, a, \Phi, \theta) + 2(\Omega_n A_1 + \alpha a B_1)\Omega_n X_n\cos\Phi + \\ &+ 2(\alpha A_1 - \Omega_n a B_1)\Omega_n X_n\sin\Phi,\end{aligned} \tag{10}$$

с краевыми условиями

$$L_c\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots\right)\Big|_{x=c} = 0, \quad c = 0, L, \tag{11}$$

где $F_0(x, a, \Phi, \theta) = F(\theta, x, aX_n\cos\Phi, -\Omega_n aX_n\sin\Phi, \dots)$.

Согласно [1, 2] после несложных выкладок в первом и в улучшенном первом приближениях находим соответственно следующие выражения:

$$u(x, t) = aX_n(x)\cos\Phi; \tag{12}$$

$$u(x, t) = aX_n(x)\cos\Phi + \varepsilon u_1(x, a, \Phi, \theta), \tag{13}$$

где $\Phi = pq^{-1}\theta + \psi$,

$$u_1 = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m,s=-\infty}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{L}F_0X_j(x)\,e^{-i(m\Phi+s\theta)}dx\,d\Phi\,d\theta}{D_j[i(m\Omega_n+s\gamma)]\int\limits_0^L X_j^2(x)\,dx}\,e^{i(m\Phi+s\theta)}X_j(x), \tag{14}$$

причем в обоих случаях величины a, ψ определяются из системы уравнений

$$da/dt = \varepsilon A_1(a, \psi), \quad d\psi/dt = \varepsilon\sigma + \varepsilon B_1(a, \psi). \tag{15}$$

Выражения для $A_1(a, \psi)$, $B_1(a, \psi)$ имеют вид

$$A_1(a, \psi) = \frac{-1}{4\pi^2\Omega_n(\alpha^2+\Omega_n^2)\int\limits_0^L X_n^2dx}\sum_r e^{irq\psi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{L}F_0X_n(x)(\Omega_n\cos\Phi +$$

$$+\alpha\sin\Phi)\,e^{-irq\overline{\psi}}d\Phi\,d\theta\,dx,$$

$$B_1(a, \psi) = \frac{-1}{4\pi^2a\Omega_n(\alpha^2+\Omega_n^2)\int\limits_0^L X_n^2dx}\sum_r e^{irq\psi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{L}F_0X_n(\alpha\cos\Phi -$$

$$-\Omega_n\sin\Phi)\,e^{-irq\overline{\psi}}d\Phi\,d\theta\,dx.$$

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^3u}{\partial t^3} + \alpha\frac{\partial^2u}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^3u}{\partial x^2dt} - \alpha b^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} = \varepsilon\left\{-2b_1^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - b_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^3u}{\partial x^2dt} - \alpha b_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t} + E(\gamma\cos\theta + \alpha\sin\theta)\right\}; \tag{16}$$

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + h_1u(x, t)\right]_{x=L} = 0. \tag{17}$$

Здесь b, b_1, α, γ — постоянные, $\theta = \gamma t + \Gamma$. Уравнения (16) (17) описывают продольное колебание балки с учетом наследственности ее материала.

Частное решение поставленной краевой задачи ищем в виде

$$u(x, t) = ax_1(x)\cos\Phi + \varepsilon u_1(x, a, \Phi, \theta) + \ldots \tag{18}$$

Здесь $X_1(x) = \sin\lambda_1x$ — характеристическая функция, соответствующая характеристическому числу λ_1, которое определяется из трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\lambda L = -\lambda/h_1$. Допустим, что имеет место соотношение

$$\Omega_1 = b\lambda_1 = \gamma + \varepsilon\sigma. \tag{19}$$

После ряда выкладок находим первое приближение асимптотического решения

$$u(x, t) = a\sin\lambda_1x\cdot\cos(\theta + \psi), \tag{20}$$

где a, ψ определяются из системы уравнений

$$da/dt_1 = -\beta^*\alpha a - E^*\cos\psi, \quad d\psi/dt_1 = 1 - \eta + \Omega_1\beta^* - b_1^*a^2 + E^*a^{-1}\sin\psi. \tag{21}$$

Здесь введены обозначения

$$\beta^*=\varepsilon\beta\lambda_1^2/2\Omega_1(\alpha^2+\Omega_1^2),\quad E^*=\varepsilon EP/2\Omega_1^2,\quad t_1=\Omega_1 t,\quad \eta=\gamma\Omega_1,$$

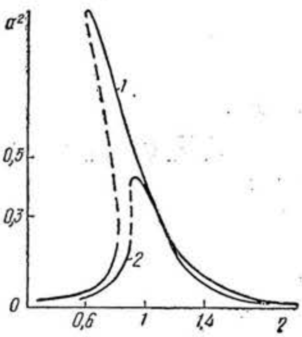
$$b_1^*=3\varepsilon(1+Q)\,b_1^2\lambda_1^4/32\Omega_1^2,\quad Q=-4\lambda_1^2h_1/(h_1^2+\lambda_1^2)\,[L\,(h_1^2+\lambda_1^2]+h_1],$$

$$P=2\,(1-\cos\lambda_1L)\,(h_1^2+\lambda_1^2)/\lambda_1\,[L\,(h_1^2+\lambda_1^2)+h_1]. \tag{22}$$

Стационарное решение системы (21) удовлетворяет соотношениям $da/dt_1=d\psi/dt_1=0$, отсюда

$$\eta=1+\Omega_1\beta^*-b_1^*a^2\pm E^*\sqrt{a^{-2}-(\beta^*\alpha E^{-1})^2} \tag{23}$$

Согласно этой формуле на рисунке изображена зависимость стационарных амплитуд a от отношения частот η для случая $E^*=0,1$, $b_1^*=0{,}5$, $\alpha=\Omega_1=1$, $\beta^*=0{,}1$ (кривая *1*) и $\beta^*=0{,}15$ (кривая *2*). Сплошные участки этих кривых соответствуют устойчивости, а штриховые — неустойчивости стационарных колебаний.



Общий случай. Исследуем краевую задачу

$$\frac{\partial^3u}{\partial t^3}+\alpha\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-b^2\frac{\partial^3d}{\partial x^2\partial t}-\alpha b\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\varepsilon F\times$$

$$\times\left(\theta_1,\ldots,\theta_h,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\ldots\right); \tag{24}$$

$$L_c\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots\right)\Big|_{x=c}=0,\quad c=0,L. \tag{25}$$

Здесь $d\theta_j/dt=\gamma_j$, $j=1,2,\ldots,h$; $F(\theta_1,\ldots,\theta_h,x,u,\partial u/\partial t,\partial u/\partial x,\ldots)$ — — 2π-периодическая функция по $\theta_1,\ldots,\theta_h$, достаточно гладкая по x на отрезке $[0,L]$, которая может быть представлена в виде конечной суммы Фурье по переменным $\theta_1,\ldots,\theta_h$ с коэффициентами, являющимися целыми рациональными функциями относительно u и ее производных.

Допустим, что для рассматриваемой здесь задачи имеет место комбинационный резонанс общего вида

$$q_{1m}\omega_1+\ldots+q_{lm}\omega_l+p_{1m}\gamma_1+\ldots+p_{hm}\gamma_h=0, \tag{26}$$

где $\omega_s=\Omega_s-\varepsilon\sigma_s$; σ_s — расстройки частот; $\Omega_s=b\lambda_s$, $s=1,2,\ldots,l$; λ_s — характеристические числа соответствующей порождающей краевой задачи ($\varepsilon=0$); q_{jm}, p_{jm} — целые числа.

Будем искать $2l$-параметрическое решение квазилинейной краевой задачи (24), (25) в виде асимптотического разложения

$$u(x,t)=\sum_{s=1}^{l}a_sX_s(x)\cos\Phi_s+\varepsilon u_1(x,a,\Phi,\theta)+\varepsilon^2u_2(x,a,\Phi,\theta)+\ldots, \tag{27}$$

в котором $X_s(x)$ — соответствующие характеристическим числам λ_s собственные функции, $a=(a_1,a_2,\ldots,al)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_h)$, $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_l)$ $\Phi_5=\eta_s+\psi_s$, а η_s, $s=1,2,\ldots,l$, удовлетворяют системе уравнений

$$d\eta_s/dt=\omega_s,\quad q_{1m}\eta_1+\ldots+q_{lm}\eta_l+p_{1m}\theta_1+\ldots+p_{hm}\theta_h=0,\quad m=1,2,\ldots,s. \tag{28}$$

Функции $u_1(x,a,\Phi,\theta)$ в (27) — 2π-периодическими по $\Phi_1,\ldots,\Phi_l$, $\theta_1,\ldots,\theta_h$, а a_s, ψ_s определяются из системы уравнений

$$da_s/dt=\varepsilon A_{1s}(a,\psi)+\varepsilon^2A_{2s}(a,\psi)+\ldots,\quad d\psi_s/dt=\varepsilon\sigma_s+\varepsilon B_{1s}(a,\psi)+$$

$$+\varepsilon^2B_{2s}(a,\psi)+\ldots,\quad s=1,2,\ldots,l,\quad \psi=(\psi_1,\ldots,\psi_l). \tag{29}$$

Подставляя выражение (27) в уравнение (24) и в краевые условия (25) и приравнивая коэффициенты при ε, получаем краевую задачу относительно неизвестной функции

$$\left(\sum_{s=1}^{l}\Omega_s\frac{\partial}{\partial\Phi_s}+\sum_{v=1}^{h}\gamma_v\frac{\partial}{\partial\theta_v}\right)^3 u_1+\alpha\left(\sum_{s=1}^{l}\Omega_s\frac{\partial}{\partial\Phi_s}+\sum_{v=1}^{h}\gamma_v\frac{\partial}{\partial\theta_v}\right)^2 u_1-$$

$$-b^2\left(\sum_{s=1}^{l}\Omega_s\frac{\partial}{\partial\Phi_s}+\sum_{v=1}^{h}\gamma_v\frac{\partial}{\partial\theta_v}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\alpha b^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=F_0(x,a,\Phi,\theta)+$$

$$+\sum_{s=1}^{l}2\Omega_s(\Omega_sA_{1s}+\alpha a_sB_{1s})X_s\cos\Phi_s+\sum_{s=1}^{l}2\Omega_s(\alpha A_{1s}-\Omega_sa_sB_{1s})X_s\sin\Phi_s;\qquad(30)$$

$$L_c\left(u_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\ldots\right)\Big|_{x=c}=0,\quad c=0,L,\qquad(31)$$

где $F_0(x,a,\Phi,\theta)=F\left(\theta_1,\ldots,\theta_h,x,\sum_{s=1}^{l}a_sX_s\cos\Phi_s,\ldots\right)$.

После ряда выкладок для первого приближения получаем следующее выражение:

$$u(x,t)=\sum_{s=1}^{l}a_sX_s(x)\cos\Phi_s,\qquad(32)$$

а для улучшенного первого приближения

$$u(x,t)=\sum_{s=1}^{l}a_sX_s(x)\cos\Phi_s+\varepsilon u_1(x,a,\Phi,\theta).\qquad(33)$$

$$u_1(x,a,\Phi,\theta)=\sum_{j=1}^{\infty}u_{1j}(a,\Phi,\theta)X_j(x),$$

$$u_{1j}(a,\Phi,\theta)=\sum_{q,p}u_{1jqp}(a)\,e^{i(q_1\Phi_1+\ldots+q_l\Phi_l+p_1\theta_1+\ldots+p_h\theta_h)},$$

Здесь a_s и ψ_s, $s=1,2,\ldots,l$, — решения системы уравнений

$$da_s/dt=\varepsilon A_{1s}(a,\psi),\quad d\psi_s/dt=\varepsilon\sigma_s+\varepsilon B_{1s}(a,\psi),$$

$$A_{1s}(a,\psi)=\frac{\sum_\mu e^{i\sum_{m=1}^{\rho}r_{ms\mu}\psi_m^*}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\int_0^L F_0X_s(x)(\Omega_s\cos\Phi_s+\alpha\sin\Phi_s)\,e^{-i\sum_{m=1}^{\rho}r_{ms\mu}\overline{\psi}_m^*}dx\,d\Phi_1\ldots d\Phi_l\,d\theta_1\ldots d\theta_h}{(2\pi)^{l+h}\Omega_s(\alpha^2+\Omega_s^2)\int_0^L X_s^2(x)\,dx},$$

$$B_{1s}(a,\psi)=\frac{\sum_\mu e^{i\sum_{m=1}^{\rho}r_{ms\mu}\psi_m^*}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\int_0^L F_0X_s(\alpha\cos\Phi_s-\Omega_s\sin\Phi_s)\times e^{-i\sum_{m=1}^{\rho}r_{ms\mu}\overline{\psi}_m^*}dx\,d\Phi_1\ldots d\Phi_l\,d\theta_1\ldots d\theta_h}{(2\pi)^{l+h}a_s\Omega_s(\alpha^2+\Omega_s^2)\int_0^L X_s^2dx},$$

$$\psi_m^*=q_{1m}\psi_1+\ldots+q_{lm}\psi_l,\quad \overline{\psi}_m^*=q_{1m}\Phi_1+\ldots+q_{lm}\Phi_l+p_{1m}\theta_1+\ldots+p_{hm}\theta_h.$$

Вычисления высших приближений не представляют затруднений.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. *408*.
2. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические методы решения уравнений в частных производных. Киев: Вища школа, 1976. *589*.

Вьетнам

Поступила в редакцию
07.09.1981 г.