УДК 517.948:513.88

Б. А. Шувар

Двусторонние оценки решений уравнений с обобщенно монотонно изображаемыми операторами

Статья посвящена двусторонним операторным неравенствам для уравнений с немонотонными правыми частями и их применению к интегральным уравнениям.

Как известно, суть теорем об интегральных, дифференциальных и других операторных неравенствах в большинстве случаев сводится к следующему. Пусть задан оператор $P : E \to \tilde{E}$, где E, $\tilde{E}$ — частично упорядоченные множества, причем $\tilde{E}$ содержит нулевой элемент θ. При выполнении тех или иных ограничений, налагаемых на оператор P и на множества E и $\tilde{E}$, может существовать такое решение x уравнения

$$Px = \theta, \tag{1}$$

для которого из неравенства

$$Pu \leqslant \theta \quad (Pu \geqslant \theta) \tag{2}$$

вытекают оценки

$$u \leqslant x \quad \text{или} \quad u \geqslant x. \tag{3}$$

Когда уравнение (1) имеет вид

$$x = T_0 x, \tag{4}$$

где $T : E \to E$, одним из наиболее существенных ограничений, обычно налагаемых на оператор T_0, является его монотонность. В [1] установлены некоторые теоремы об операторных неравенствах, в которых условие монотонности оператора T_0 заменено менее ограничительным L_1 (L_2)-условием Н. В. Азбелева. Известны и другие работы, посвященные ослаблению требования монотонности оператора T_0 в условиях теорем об операторных неравенствах [2—5].

Будем рассматривать уравнение (4), в котором $T_0 : E_1 \to E_1 \subseteq E$, E — полуупорядоченное пространство с топологией, порожденной полуупорядоченностью. Предположим, что заданы операторы $\Phi(y, z)$, $T(y, z) : E_1 \times E_1 \to E_1$, обладающие следующими свойствами: А) оператор $F(y, z) = T(y, z) + \Phi(T(y, z), T(z, y)) - \Phi(y, z)$ не убывает по y и не возрастает по z: Б) $T(x, x) = T_0 x \; \forall \, x \in E_1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1) *заданы* $u, v \in E_1$, *удовлетворяющие соотношениям* $u \leqslant F(u, v)$, $v \geqslant F(v, u)$; 2) *последовательности* $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *построенные при помощи формул* $y_0 = u$, $z_0 = v$, $y_{n+1} = F(y_n, z_n)$, $z_{n+1} = F(z_n, y_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, *сходятся соответственно к компонентам* y^*, z^* *крайнего* [5] *в* E_1 *решения* (y^*, z^*) *системы* $y = F(y, z)$, $z = F(z, y)$. *Тогда для любого решения* $x \in E_1$ *уравнения* (4) *имеют место оценки*

$$u \leqslant x \leqslant v. \tag{5}$$

Доказательство. На основании теоремы 3 из работы [5] соотношения (5) выполнены для любого решения $x \in E_1$ уравнения

$$x = F(x, x). \tag{6}$$

Поскольку любое решение $x \in E_1$ уравнения (4) является решением уравнения (6), то теорема доказана.

Как простые следствия этой теоремы получаются, например, следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть задан такой оператор* $\Phi: E_1 \to E_1$, *что оператор* $F = T_0 + \Phi T_0 - \Phi$ — *изотонный. Если процесс последовательных приближений* $x_{n+1} = Fx_n$ *с начальным приближением* $x_0 = u$ $(x_0 = v)$ *сходится к нижнему решению* $y^* \in E_1$ *(верхнему решению* $z^* \in E_1$*) уравнения* $x = Fx$, *то из неравенства* $u \leqslant Fu$ $(v \geqslant Fv)$ *следует оценка*

$$u \leqslant y^* \quad (v \geqslant z^*). \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:* 1) *существует такое натуральное* k, *что* T_0^k — *изотонный оператор;* 2) *задано* $u \in E_1$ $(v \in E_1)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$u \leqslant T_0^k u \quad (v \geqslant T_0^k v); \tag{8}$$

3) *существует такое натуральное* m, *что последовательные приближения*

$$x_0 = u \ (x_0 = v), \quad x_{n+1} = T_0^{km} x_n$$

сходятся к нижнему решению $y^* \in E_1$ *(верхнему решению* $z^* \in E_1$*) уравнения* $x = T_0^{km} x$. *Тогда любое решение* $x \in E_1$ *уравнения* (4) *удовлетворяет оценке*

$$u \leqslant x \quad (v \geqslant x). \tag{9}$$

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях теоремы 2 можно положить $\Phi = \sum_{l=0}^{km-1} T_0^l$, где $T_0^0 = I$, I — тождественный оператор.

Теорема 4. [6]. *Пусть* E — *полуупорядоченное нормированное пространство,* E_1 — *замкнутое множество элементов из* E, *оператор* $T_0 : E_1 \to E_1$ *непрерывен,* T_0^m — *сжимающий,* T_0^k — *изотонный,* m, k — *заданные натуральные числа. Тогда из* (8) *вытекает оценка* (9) *для единственного решения* $x \in E_1$ *уравнения* (4).

Рассмотрим случай, когда уравнение (4) имеет вид

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,\ s,\ x(s,\ x(s))\, ds, \tag{10}$$

где t, $s \in [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, оператор $K(t,\ s,\ y,\ z) : E \times E \to EAt$, $s \in [a, b]$ непрерывен по совокупности аргументов, E — банахова структура, $f(t) \in C(E, [a, b])$, т. е. $f(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, принимающая значения из E. Предполагаем, что полуупорядоченность в E введена при помощи конуса K, обладающего свойством телесности. Как обычно, запись $x \ll y$ означает, что $y - x$ — внутренний элемент конуса K, $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in K$.

Пусть оператор $\Phi(y, z) \equiv \Phi(t, y, z)$ определен при помощи формулы $\Phi(t, y, z) = \int_a^t A(t, s, y, z)\, ds$, где непрерывный по совокупности аргументов оператор $A(t, s, y, z)$ при всех фиксированных t, $s \in [a, b]$ действует из $E \times E$ в E. В этом случае оператор $F(y, z)$ имеет вид

$$F(y, z) = f(t) + \int_a^t H(t,\ s,\ y(s),\ z(s))\, ds,$$

где

$$H(t, s, y(s), z(s)) = K(t, s, y(s), z(s) - A(t,\ s,\ y(s),\ z(s)) + A(t,\ s,\ f(s) +$$

$$+ \int_a^s K(s, \xi, y(\xi), z(\xi))\, d\xi, \quad f(s) + \int_a^s K(s, \xi, z(\xi), y(\xi))\, d\xi.$$

Предположим, что $H(t, s, y, z)$ не убывает по y, а по z не возрастает.

Теорема 5. *Если заданы $p(t), q(t) \in C(E, [a, b])$, удовлетворяющие на сегменте $[a, b]$ неравенствам*

$$p(t) \ll f(t) + \int_a^t H(t, s, p(s), q(s)), \quad q(t) \gg f(t) + \int_a^t H(t, s, q(s), p(s))\, ds,$$

то на этом сегменте

$$p(t) \ll x(t) \ll q(t) \tag{11}$$

для любого решения $x(t) \in C(E, [a, b])$ уравнения (10).

Доказательство. Согласно теореме 5 из [7] неравенства (11) справедливы на сегменте $[a, b]$ для любого решения $x(t) \in C(E\ [a, b])$ уравнения

$$x(t) = f(t) + \int_a^t H(t, s, x(s), x(s))\, ds. \tag{12}$$

Любое же решение уравнения (10) удовлетворяет уравнению (12). Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть*: 1) *система уравнений*

$$y(t) = f(t) + \int_a^t H(t, s, y(s), z(s))\, ds, \tag{12'}$$

$$z(t) = f(t) + \int_a^t H(t, s, z(s), y(s))\, ds,$$

однозначно разрешима в $C(E, [a, b]) \times C(E, [a, b]$, причем ее решение имеет вид $(x(t), x(t))$; 2) *заданы функции $u(t), v(t) \in C(E, [a, b])$, удовлетворяющие соотношениям*

$$u(t) \leqslant f(t) + \int_a^t H(t, s, u(s), v(s)) ds, \quad v(t) \geqslant f(t) + \int_a^t H(t, s, v(s), u(s))\, ds,$$
$$t \in [a, b].$$

Тогда, если в $C(E, [a, b])$ решение $x(t)$ уравнения (10) *существует, то оно единственно и для него на $[a, b]$ выполняются оценки*

$$u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t). \tag{13}$$

Доказательство. Положим $T(y, z) = f(t) + \int_a^t K(t, s, y(s), z(s))\, ds$. Очевидно, что условия А) и Б) выполнены. Условие 2) теоремы означает, что элементы $u = u(t)$, $v = v(t)$ удовлетворяют условию 1) теоремы 1. Существует сегмент $[a, b_0] \subseteq [a, b]$, на котором выполнено и условие 2) теоремы 1, т. е. к решению $(y(t), z(t))$, $y(t), z(t) \in C(E, [a, b])$ системы (12′) сходятся последовательности $\{y\ \ (t)\}$, $\{z_n(t)\}$, определенные формулами

$$y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t), \quad y_{n+1}(t) = f(t) + \int_a^t H(t, s, y_n(s), z_n(s))\, ds,$$

$$z_{n+1}(t) = f(t) + \int_a^t H(t, s, z_n(s), y_n(s))\, ds, \quad n = 0, 1, \dots,$$

на некотором сегменте $[a, b_0] \subseteq [a, b]$. Доказательство аналогично доказательству сходимости последовательных приближений в лемме 1 из [7].

Таким образом, как следует из теоремы 1, утверждение доказываемой теоремы имеет место на $[a, b_0]$. При этом решение $(y(t), z(t))$ — крайнее решение системы (12′) в $C(E, [a, b_0])$. Используя далее рассуждения, которые проведены при доказательстве теоремы 7 из [7], получаем, что теорема 6 имеет место на всем $[a, b]$.

Пусть $f(t)$ и $K(t, s)$, $A(t, s)$ — вещественные функции, интегрируемые с квадратом соответственно в областях (a, b) и $(a, b) \times (a, b)$. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{14}$$

Предположим, что $H(t, s) = K(t, s) - A(t, s) + \int_s^t A(t, \xi) K(\xi, s)\, d\xi \geqslant 0$, $t, s \in \in [a, b]$.

Теорема 7. *Если задана функция $u(t) \in L_2(a, b)$ ($v(t) \in L_2(a, b)$) такая, что при почти всех $t \in (a, b)$ имеем*

$$u(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t H(t, s)\, u(s)\, ds \quad \left(v(t) \geqslant \varphi(t) + \int_a^t H(t, s)\, v(s)\, ds\right),$$

где $\varphi(t) = f(t) + \int_a^t A(t, s) f(s)\, ds$, то при почти всех $t \in (a, b)$ *выполнена оценка* $u(t) \leqslant x(t)$ ($v(t) \geqslant x(t)$) *для единственного решения* $x(t) \in L_2(a, b)$ *уравнения* (14).

Вместо уравнения (14) рассмотрим уравнение

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)\, x(\tau)(s))\, ds, \tag{15}$$

где $f(t)$, $K(t, s)$ — те же, что и в условиях предыдущей теоремы, функция $\tau(t) \leqslant t$ непрерывна на $[a, b]$. Предположим, что уравнение (15) однозначно разрешимо на $[a, b]$. Утверждение теоремы 7 справедливо и для уравнения (15), если выполнены условия теоремы 7, в которых оператор, порожденный правой частью (17), заменен оператором, порожденным правой частью уравнения (15).

Воспользуемся теоремой 7 при рассмотрении следующего простого примера. Пусть $K(t, s) = a(t)\, b(s)$, $A(t, s) = \alpha(t)\, \beta(s)$. Тогда $H(t, s) = [a(t) + \alpha(t)\, \psi(t)]\, b(s) - \alpha(t)\, [\beta(s) + b(s)\, \psi(s)]$, где $\psi(t) = \int_c^t a(\xi)\, \beta(\xi)\, d\xi$, $c \in [a, b]$. Если $\alpha(t)$, $\beta(s)$ выбраны так, что $H(t, s) \geqslant 0$, то из неравенства

$$u(t) \leqslant f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s) f(s)\, ds + \int_a^t H(t, s)\, u(s)\, ds$$

вытекает оценка

$$u(t) \leqslant f(t) + a(t) \int_a^t f(s)\, b(s) \exp\left[\int_s^t a(\xi)\, b(\xi)\, d\xi\right] ds = x(t).$$

Если $b(t) \geqslant 0$, в частности, $\beta(t) = cb(t) \exp\left[-\int_c^t a(\xi)\, b(\xi)\, d\xi\right]$, где $c > 0$, $c \in [a, b]$ — произвольные числа. При этом $\alpha(t)$ выберем так, чтобы выполнялось неравенство $a(t) + \alpha(t)\, [\psi(t) - 1] \geqslant 0$. В данном случае имеем $H(t, s) = b(s)\, [a(t) + \alpha(t)\, \psi(t) - \alpha(t)]$.

Рассмотрим другой способ построения оператора $\Phi(t, y, z)$ для уравнения (10). Положим

$$\Phi(t, y, z) = -\alpha y(\bar{t}), \tag{16}$$

где $\alpha \in [0, 1]$, $\bar{t} \in (a, t)$. Оператор $T(t, x) = \int_a^t K(t, s, x, x)\, ds$ в [2] назван обобщенно монотонным, если изотонен оператор

$$T(t, x) - \alpha T(\bar{t}, x) = \int_a^t K(t, s, x, x)\, ds - \alpha \int_a^{\bar{t}} K(\bar{t}, s, x, x)\, ds. \tag{17}$$

В [2] понятие обобщенной монотонности используется при доказательстве теоремы о дифференциальном неравенстве для уравнения $x' = f(t, x)$ с условиями Каратеодори, установленной ранее [8—11].

Пусть оператор $\Phi(t, y, z)$ имеет вид (16) и для любого $t \in [a, b]$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $t - \varepsilon \in (a, t)$, причем при $\bar{t} \in (t - \varepsilon, t)$ оператор (17) не убывает по x.

Теорема 8. *Если задана функция* $p(t) \in C(E, [a, b])$ $[q(t) \in C(E, [a, b])]$, *удовлетворяющая на* $[a, b]$ *неравенству* $p(t) - \alpha p(\bar{t}) \ll T(t, p) - \alpha T(\bar{t}, p) + f(t) - \alpha f(\bar{t})$, $[q(t) - \alpha q(\bar{t}) \gg T(t, q) - \alpha T(\bar{t}, q) + f(t) - \alpha f(\bar{t})]$ *то из существования решения* $x(t) \in C(E, [a, b])$ *уравнения* (10) *вытекает справедливость оценки* $p(t) \ll x(t)$ $(q(t) \gg x(t))$ *на сегменте* $[a, b]$.

Доказательство очевидно.

1. *Азбелев Н. В., Цалюк З. Б.* О задаче Чаплыгина.— Укр. мат. журн., 1958, 10, 1, *3—12*.
2. *Walter W.* Differential- und Integral-Ungleichungen. B., 1970, *270*.
3. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities. N. Y., 1969, *320*.
4. *Elsner L.* Quasimonotonie und Ungleichungen in halbgeordneten Räumen.— Linear Algebra and Its Appl., 1974, *8*, 3, *249—261*.
5. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Об операторных и интегральных неравенствах.— Укр. мат. журн., 1973, 25, 3, *386—390*.
6. *Азбелев Н. В., Цалюк З. Б.* Об одном методе оценок решений уравнений.— Волжский мат. сб., 1965, 6, *3—9*.
7. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* О двусторонних операторных неравенствах для уравнения типа Вольтерра.— В кн.: Нелинейные краевые задачи математической физики. Киев, 1973, *264—282*.
8. *Baiada E.* Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat.e natur., 1947, 3, 8, *258—263*.
9. *Cafiero F.* Su due teoremi di confronto gelativi ad unequazione differenziale ordinaria delprimo ordine.— Boll. Union. mat. ital., 1948, 3, 3, *124—128*.
10. *Lakshmikanthom V.* On the boundedness of solutions of nonlineardifferential equations.— Proc. Amer. Math. Sos., 1957, *8*, *1044—1048*.
11. *Olech C., Opial Z.* Sur une inégalité différentiele.— Ann. pol.math., 1960, 7, *247—254*.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию
26.11.1980.