АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 34, № 3, 1982

Научный журнал, основан в 1949 г.
Выходит один раз в два месяца

Киев «Наукова думка»

УДК 517.53

В. В. Андриевский, С. П. Герман

Аппроксимация функций, определяемая гладкостями k-го порядка, в областях с кусочно-квазиконформной границей

В статье устанавливается прямая теорема теории приближений на некотором классе областей с кусочно-квазиконформной границей в терминах равномерных модулей гладкости порядка k ($k \geqslant 1$) [1].

В работах [2, 3] разработан метод, позволяющий распространить прямые теоремы В. К. Дзядыка на случай $k \geqslant 2$. При помощи этого же метода прямая задача для $k = 2$ была в [4] решена для множеств B_k^0 и на кусочно-гладких дугах. На таких же множествах в работе [3] получены прямые теоремы при произвольных $k > 1$. В [5] прямые теоремы распространены на случай $k > 1$ в областях с квазиконформной границей.

1. Основные определения и результаты. Пусть G — произвольная ограниченная область комплексной плоскости с односвязным дополнением $\Omega = C\overline{G}$, обозначим через $\Phi(z)$ функцию, которая конформно и однолистно отображает Ω на $\Omega' = \{w : |w| > 1\}$ и нормирована условиями: $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi(z)\cdot z^{-1} > 0$. Продолжим $\Phi(z)$ непрерывно вплоть до границы $L = \partial G = \partial\Omega$, сохранив для продолженной функции обозначение Φ, а обратную функцию обозначим через Ψ.

Определение 1. *$G \in PQ$, если на $|w| = 1$ можно указать конечное число точек $w_1, w_2, \ldots, w_{p+1} = w_1$; $\arg w_j < \arg w_{j+1}$, со следующими свойствами:*

а) $\overline{\Omega'} = \{w : |w| \geqslant 1\} = \bigcup\limits_{j=1}^{p} \overline{\Omega'_j}$, *где* $\Omega'_j = \{w : |w| > 1;\quad \arg w_j < \arg w < \arg w_{j+1}\}$;

б) $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{p} \overline{\Omega_j}$, $L = \sum\limits_{j=1}^{p} L^{(j)}$, $\overline{\Omega_j} = \Psi(\overline{\Omega'_j})$, $L^{(j)} = L \cap \Omega_j$;

с) *каждая* $\Omega_j = \Psi(\Omega'_j)$ *является областью (определение и основные свойства квазиконформных кривых приведены в* [6]) *с квазиконформной границей.*

Свойства областей класса PQ были изучены в работе [7].

Под символом $A \preccurlyeq B$ ($A > 0$, $B > 0$) понимается неравенство $A \leqslant CB$, где C — константа, не зависящая от A и B.

Пусть $G \in PQ$, $z \in L$, $\zeta \in \Omega$, $j = \overline{1, p}$, $R > 1$. Положим $\tilde{z}_R = \Psi[R\Phi(z)]$, $\tilde{\zeta}_R = \Psi[R\Phi(\zeta)]$, $L_R = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = R\}$, $L_R^{(j)} = L_R \cap \overline{\Omega}_j$, $G_R = \Omega \cap \operatorname{int} L_R$, $\rho_R(z) = \inf\limits_{\zeta \in L_R} |\zeta - z|$, $\rho_R^{(j)}(z) = \inf\limits_{\zeta \in L_R^{(j)}} |\zeta - z|$, $d(\zeta, \overline{G}) = \inf\limits_{z \in \overline{G}} |\zeta - z|$, $\zeta_L = \Psi[\Phi(\zeta) |\Phi(\zeta)|^{-1}]$.

Если n — произвольное натуральное число, то положим $\tilde{z}_{1+n^{-1}} = \tilde{z}$, $\tilde{\zeta}_{1+n^{-1}} = \tilde{\zeta}$, $\rho_{1+n^{-1}}(z) = \rho(z)$, $\rho^{(j)}_{1+n^{-1}}(z) = \rho^{(j)}(z)$.

Следствие 1. *При $z \in L^{(j)}$, $\zeta \in \Omega_j$ имеют место следующие соотношения:*

$$1)\ d(\zeta, \overline{G}) \asymp |\zeta - \zeta_L|,\ \rho^{(j)}(z) \asymp |z - \tilde{z}|; \tag{1}$$

$$2)\ \text{если } |\zeta - z| \leqslant \rho^{(j)}(z), \text{ то } |\zeta - \tilde{\zeta}| \asymp \rho^{(j)}(z). \tag{2}$$

Определение 2. *$G \in PQ_0$, если: а) $G \in PQ$; б) любые две точки z и $\zeta \in \overline{G}$ можно соединить дугой $\gamma(z, \zeta) \subset G$, длина которой удовлетворяет соотношению $\operatorname{mes} \gamma(z, \zeta) \leqslant |z - \zeta|$; с) пусть $z \in L^{(j)}$; $j = \overline{1, p}$, тогда при всех $\zeta \in L^{(i)}$, $i = \overline{1, p}$, таких, что $|\zeta - z| \leqslant \rho^{(j)}(z)$, имеет место соотношение $\rho^{(i)}(\zeta) \asymp \rho^{(j)}(z)$.*

Следствие 2. *Пусть $G \in PQ_0$, $z \in L^{(j)}$, тогда в силу (2) и свойства с) определения 2 $\rho^{(j)}(z) \asymp \rho(z)$.*

Область G с квазиконформной границей принадлежит классу PQ_0. В нашей статье используются равномерные модули гладкости, введенные в [1] и обозначаемые через $\omega^{*}_{k,N,\overline{G},f}(\delta)$, где $\delta > 0$, $N \geqslant 1$ — постоянная. В работе [5, с. 164] отмечен следующий результат о нормальности модулей гладкости: для любых континуумов E, удовлетворяющих свойству б) из определения 2, $k = 1, 2, \ldots$ и $N \in [2k, \infty]$, модуль гладкости $\omega_{k,N,E,f}(\delta)$ всякой конечной функции $f(z)$, определенной на E, обладает свойством нормальности: $\omega^{*}_{k,N,E,f}(t\delta) \leqslant t^k \omega_{k,N,E,f}(\delta)$, $\forall t \geqslant 1$, $\forall \delta > 0$.

Пусть r — целое неотрицательное. Обозначим через $A^{(r)}(\overline{G})$ класс функций, аналитичных в G, r-я производная которых непрерывна на $\overline{G}$.

Сформулируем основной результат нашей статьи.

Теорема 1. *Пусть область $G \in PQ_0$, $f \in A^{(r)}(\overline{G})$. Тогда для любого натурального n существует полином $P_n(z)$, степени не выше n, для которого при $z \in L = \partial G$, $\nu = 0, 1, \ldots, r$ и $N \geqslant 4k$, выполняется неравенство $|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant \rho^{r-\nu}(z)\, \omega_{k,N,\overline{G},f^{(r)}}[\rho(z)]$.*

2. Приближение ядра Коши. При построении аппроксимационных полиномов, используемых в приближении функций класса $A^{(r)}(\overline{G})$, будут применены ядра $K(\zeta, z) = K_{r+1,l,m,n}(\zeta; z)$, введенные в работе [8, с. 429]. Свойства этих ядер описывает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $G \in PQ$, $m > 0$, $r \geqslant 0$, $R > 1$ — произвольные фиксированные числа. Тогда существует натуральное число $l = l(G) \geqslant 2$, при котором для всех $z \in \overline{G}$, $\zeta \in G_R^{(j)} = G_R \cap \Omega_j$ и $\nu = \overline{0, r+1}$ справедливы соотношения*

$$|\partial^\nu/\partial z^\nu [(\zeta - z)^{-1} - K(\zeta, z)]| \leqslant [\rho^{(j)}]^m |\zeta - z|^{-(\nu+1)} (|\zeta - z| + \rho^{(j)})^{-m}; \tag{3}$$

$$|\partial^\nu/\partial z^\nu K(\zeta, z)| \leqslant |\zeta - z|^{-\nu} (|\zeta - z| + \rho^{(j)}), \tag{4}$$

под $\rho^{(j)}$ здесь и в дальнейшем понимается $\rho^{(j)}(z^{(j)})$, где $z^{(j)}$ — ближайшая к z точка дуги $L^{(j)}$.

Соотношения (3) и (4) доказаны при $\nu = 0$ в работе [7]. Переход к случаю $v = \overline{1, r+1}$ осуществляется с помощью математической индукции и несложных алгебраических преобразований (аналогично доказательству в работе [4, с. 89—90]).

3. Теорема единственности. Докажем теорему единственности для аппроксимационных полиномов.

Теорема 3. *Пусть G — произвольная жорданова область $f(z)=0$ при $z\in G$, а $f^*(z)$ — ее* Lip1-*продолжение в конечную комплексную плоскость. Тогда*

$$P_n(z)=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{L_R} f^*(\zeta)K(\zeta,z)\,d\zeta-(\pi)^{-1}\iint\limits_{G_R}\partial f^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}K(\zeta,z)\,d\sigma_\zeta\equiv 0 \quad (5)$$

где $R>1$ — произвольное число.

Доказательство. Выберем последовательность областей Ω_p, $\Omega_p\supset\Omega$, сходящуюся к Ω как к своему ядру относительно бесконечно удаленной точки, через $\Phi_p(z)$ обозначим функцию, конформно и однолистно отображающую Ω_p на Ω' с нормировкой $\Phi_p(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\Phi_p(z)\cdot z^{-1}>0$, а через $K(\zeta,z,\Phi_p)=K_{r+1,l,m,n}(\zeta,z,\Phi_p)$ — соответствующее многочленное ядро, определенное по функции Φ_p вместо Φ [8, с. 429].

Через γ_p обозначим произвольный спрямляемый контур, лежащий в $\Omega_p\diagdown\Omega$ и разделяющий $\partial\Omega_p$ и $\partial\Omega$. Применяя формулу Коши — Помпея [6, с. 150] в $\operatorname{ext}\gamma_p\cap\operatorname{int}L_R$, получаем

$$(2\pi i)^{-1}\int\limits_{L_R} f^*(\zeta)K(\zeta,z,\Phi_p)\,d\zeta-(\pi)^{-1}\iint\limits_{G_R}\partial f^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}\cdot K(\zeta,z,\Phi_p)\,d\sigma_\zeta=0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $p\to\infty$, с учетом теоремы Каратеодори [9, с. 39] получим соотношение (5).

Следствие 3. *Пусть $G\in PQ$, f_1^* и f_2^* — функции класса* Lip 1 *в конечной комплексной плоскости, удовлетворяющие условию $f_1^*(\zeta)=f_2^*(\zeta)$, $\zeta\in\bar{G}$, тогда при целых $\nu\geqslant 0$*

$$(2\pi i)^{-1}\int\limits_{L_R} f_1^*(\zeta)\,\partial^\nu/\partial z^\nu K(\zeta,z)\,d\zeta-(\pi)^{-1}\iint\limits_{G_R}\partial f_1^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}\partial^\nu/\partial z^\nu K(\zeta,z)\,d\sigma_\zeta=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{L_R} f_2^*(\zeta)\,\partial^\nu/\partial z^\nu K(\zeta,z)\,d\zeta-(\pi)^{-1}\iint\limits_{G_R}\partial f_2^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}\partial^\nu/\partial z^\nu K(\zeta,z)\,d\sigma_\zeta.$$

4. Гладкое продолжение функций с областей класса PQ. В работе [10] построена процедура непрерывного продолжения функций с ограниченной квазиконформной дуги в конечную комплексную плоскость. Во всех построениях существенно использовались только геометрические свойства внешней функции Римана Φ, которые в случае ограниченных квазиконформных дуг и областей класса PQ описываются единообразно [7, 10]. Следуя тем же путем, можно убедиться в справедливости такого результата.

Теорема 4. *Пусть $G\in PQ$, $f(z)\in A(\bar{G})$, $R>1$ — фиксированное число. Тогда существует функция $f^*(z)$ со следующими свойствами:*

1) *$f^*(z)$ задана и непрерывна в конечной комплексной плоскости, причем $f^*(z)=f(z)$, $z\in\bar{G}$;*

2) *$f^*(z)$, $z=x+iy$, непрерывно дифференцируема по x и y в G_R и для $z\in G_R$ имеет место неравенство*

$$|\partial f^*(z)/\partial x|+|\partial f^*(z)/\partial y|\leqslant|z-z_L|^{-1}\cdot\sup_{\substack{|\zeta-z_L|\leqslant|z-z_L|\\ \zeta\in L}}|f(\zeta)-f(z_L)|,$$

где $z_L=\Psi[\Phi(z)|\Phi(z)|^{-1}]$;

3) *если $z\in\bar{G}$, $\zeta\in G_R$, то $|f^*(z)-f^*(\zeta)|\leqslant\sup\limits_{|z-\xi|\leqslant|z-\zeta|}|f(\xi)-f(z)|$.*

5. Построение аппроксимационных полиномов и доказательство теоремы 1. Для $f(z)\in A^{(r)}(\bar{G})$ положим $F(z)=$ $=\int\limits_{z^*}^{z} f(t)\,dt$, где $z^*\in\bar{G}$ — произвольная фиксированная точка, $z\in\bar{G}$ (под

$\int\limits_{z^*}^{z} \varphi(t)\, dt$ понимаем криволинейный интеграл, взятый по любой спрямляемой дуге, соединяющей в $\overline{G}$ точки z^* и z и удовлетворяющей условию б) определения 2).

Очевидно, $F(z) \in \mathrm{Lip}\,1$. Пусть $F^*(\zeta)$ — произвольное Lip1-продолжение $F(z)$ в комплексную плоскость. Аппроксимационные полиномы $P_n(z)$ для $f(z)$ зададим формулой

$$P_n(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{L_3} F^*(\zeta)\, \partial/\partial z K(\zeta, z)\, d\zeta - (\pi)^{-1} \iint\limits_{G_3} \partial F^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}\, \partial/\partial z K(\zeta, z)\, d\sigma_\zeta. \tag{6}$$

Согласно следствию 2 $P_n(z)$ не зависит от способа продолжения функции $F(z)$.

Интегральное представление для функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{L_3} F^*(\zeta)(\zeta - z)^{-2} d\zeta - (\pi)^{-1} \iint\limits_{G_3} \partial F^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}\, (\zeta - z)^{-2} d\sigma_\zeta, \quad z \in G. \tag{7}$$

В этом легко убедиться, записав формулу Коши—Помпея для функции $F(z)$ и продифференцировав ее.

Возьмем точку $z_0 \in L$, натуральное n и обозначим $\rho = \rho(z_0)$, $U = U(\rho, z_0) = \{\zeta : |\zeta - z_0| < \rho\}$. Зафиксируем в качестве z произвольную точку множества $G_{z_0, \rho/2} = G \cap \{\zeta : |\zeta - z_0| < \rho/2\}$, а в качестве $z_1, \ldots, z_k$ — произвольные точки множества $\overline{G_{z_0,\rho/2}}$, удаленные друг от друга и от z на расстоянии, не менее $\rho/8k$.

Функция $f \in A^{(r)}(\overline{G})$ представима в виде [1, с. 253]

$$f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{r-1} (\nu!)^{-1} (\zeta - z_0)^\nu f^{(\nu)}(z_0) + [(r-1)!]^{-1} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (\zeta - t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} (\nu!)^{-1} (\zeta - z_0)^\nu f^{(\nu)}(z_0) + [(r-1)!]^{-1} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (\zeta - t)^{r-1} Q_k(t)\, dt +$$

$$+ [(r-1)!]^{-1} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (\zeta - t)^{r-1} \varphi(t)\, dt = \pi(\zeta) + \alpha(\zeta),$$

где $Q_k(t)$ — полином степени $k-1$, интерполирующий функцию $f^{(r)}(z)$ в точках $z_1, \ldots, z_k$; $\varphi(t) = [t, z_1, \ldots, z_k;\ f^{(r)}, t]$ — соответствующая конечная разность [1, с. 43 — 47].

$$\pi(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{r-1} (\nu!)^{-1} (\zeta - z_0)^\nu f^{(\nu)}(z_0) + [(r-1)!]^{-1} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (\zeta - t)^{r-1} Q_k(t)\, dt,$$

$$\alpha(\zeta) = [(r-1)!]^{-1} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (\zeta - t)^{r-1} \varphi(t)\, dt. \tag{8}$$

В соответствии с соотношениями, приведенными в [5, 11],

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant \mu_k [0{,}5(|\zeta - z_0| + \rho)], \qquad \zeta \in \overline{G}, \tag{9}$$

где $\mu_k(t) = \mu(t)(t\rho^{-1})^{k-1}$, $\mu(t) = \omega_{k, 4k, \overline{G}, f^{(r)}}(t)$.

Таким образом, в силу соотношений (8) и (9)

$$|\alpha(\zeta)| \leqslant \mu_k(|\zeta - z_0| + \rho)\, |\zeta - z_0|^r. \tag{10}$$

Для фиксированной точки z_0 функцию $F(\zeta)$ запишем в виде

$$F(\zeta) = \int\limits_{z^*}^{\zeta} f(t)\, dt = \int\limits_{z^*}^{z_0} f(t)\, dt + \int\limits_{z_0}^{\zeta} \pi(t)\, dt + \int\limits_{z_0}^{\zeta} \alpha(t)\, dt = \Pi(\zeta) + \beta(\zeta),$$

где полином $\Pi(\zeta) = \int\limits_{z^*}^{z_0} f(t)\,dt + \int\limits_{z_0}^{\zeta} \pi(t)\,dt$ степени $r+k$ равномерно ограничен в силу неравенства (9) при любом выборе z^* и z_0 величиной $\rho^{-k} \leqslant \leqslant n^{-2k}$, а

$$\beta(\zeta) = \int\limits_{z_0}^{\zeta} \alpha(t)\,dt. \tag{11}$$

Используя теорему 4, (11), (10), геометрические свойства областей класса PQ_0 и свойство нормальности функций $\mu_k(t)$, получаем оценку для $\partial\beta^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}$ (β^* — Lip 1-продолжение функции β) в точке $\zeta \in G_3$

$$|\partial\beta^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}| \leqslant |\zeta - \zeta_L|^{-1} \sup_{\substack{|\xi-\zeta_L| \leqslant |\zeta-\zeta_L| \\ \xi\in L}} \left| \int\limits_{\xi}^{\zeta_L} \alpha(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \mu_k(|\zeta - z_0|)\,|\zeta - z_0|^r, & |\zeta - z_0| \geqslant \rho, \\ \mu_k(\rho)\,|\zeta - z_0|^r, & |\zeta - z_0| \leqslant \rho. \end{cases} \tag{12}$$

Продолжим функцию $F(\zeta)$, полагая

$$F^*(\zeta) = \begin{cases} F(\zeta), & \zeta \in \bar{G}, \\ \Pi(\zeta) + \beta^*(\zeta), & \zeta \in \Omega. \end{cases}$$

В этом случае, с учетом соотношений (6), (7) и обозначения $\partial^{\nu+1}/\partial z^{\nu+1} \times \times [(\zeta - z)^{-1} - K(\zeta, z)] = A(\zeta, z)$, имеем

$$f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{L_3} F^*(\zeta)\,A(\zeta, z)\,d\zeta - (\pi)^{-1} \iint\limits_{G_3 \setminus [U\cap\Omega]} \partial\beta^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta} \times$$

$$\times A(\zeta, z)\,d\sigma_\zeta + (\pi)^{-1} \iint\limits_{U\cap\Omega} \partial\beta^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta}\,\partial^{\nu+1}/\partial z^{\nu+1} K(\zeta, z)\,d\sigma_\zeta - (\pi)^{-1} \iint\limits_{U\cap\Omega} \partial\beta^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta} \times$$

$$\times (\zeta - z)^{-(\nu+2)}\,d\sigma_\zeta = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{13}$$

Интегралы пронумерованы в порядке следования.

Первые три интеграла оцениваются несложно, с применением теоремы 2 и соотношения (12)

$$\sum_{i=1}^{3} |I_i| \leqslant \mu(\rho)\,\rho^{r-\nu}. \tag{14}$$

Действительно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{3} |I_i| \leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant p} \mu_k(\rho^{(j)})\,(\rho^{(j)})^{m+r-\nu}\,(|z - z^{(j)}| + \rho^{(j)})^{-m}, \tag{15}$$

где $\rho^{(j)} = \rho^{(j)}(z^{(j)})$, нам достаточно показать, что величина D, стоящая в правой части неравенства (15), не превосходит $\mu(\rho)\,\rho^{r-\nu}$.

Нетривиальным является случай, когда $|z_0 - z^{(j)}| \geqslant \rho^{(j)} + \rho$, $\rho^{(j)} \geqslant \rho$.

Зафиксируем индекс j и для произвольного $R > 1$ положим $\tilde{z}_{0,R} = \Psi[R\Phi(z_0)]$, $\tilde{z}_R^{(j)} = \Psi[R\Phi(z^{(j)})]$, а через R_0 и R_j обозначим числа, удовлетворяющие равенствам $|\tilde{z}_{0,R} - z_0| = |\tilde{z}_{R_j}^{(j)} - z^{(j)}| = |z_0 - z^{(j)}|$.

В силу свойства c) из определения класса PQ_0 и соотношения (1) имеем $R_0 - 1 \asymp R_j - 1$.

Используя результаты работы [7] и неравенство (1), находим

$$\rho^{(j)}\,|z_0 - z^{(j)}|^{-1} \asymp |z^{(j)} - \tilde{z}^{(j)}|\,|z^{(j)} - \tilde{z}_{R_j}^{(j)}|^{-1} \leqslant n^{-\beta}(R_j - 1)^{-\beta}; \tag{16}$$

$$\rho\,|z_0 - z^{(j)}|^{-1} \asymp |z_0 - \tilde{z}_0|\,|z_0 - \tilde{z}_{R_0}|^{-1} \leqslant n^{-\alpha}(R_0 - 1)^{-\alpha}. \tag{17}$$

Сопоставляя неравенства (16) и (17) при $m \geqslant (\alpha\beta^{-1} - 1)(r - \nu + 1)$ получаем

$$[\rho^{(j)} | z_0 - z^{(j)} |^{-1}]^{m+(r-\nu+1)} \leqslant [\rho | z_0 - z^{(j)} |^{-1}]^{r-\nu+1}.$$

Следовательно,

$$\mu_k(\rho^{(j)}) \mu_k^{-1}(\rho) [\rho^{(j)} \cdot \rho^{-1}]^{r-\nu} [\rho^{(j)} (| z_0 - z^{(j)} | + \rho^{(j)})^{-1}]^m \leqslant [\rho^{(j)} \cdot \rho^{-1}]^{r-\nu+1} \times$$
$$\times [\rho^{(j)} | z_0 - z^{(j)} |^{-1}]^m = [\rho^{(j)} | z_0 - z^{(j)} |^{-1}]^{m+(r-\nu+1)} [| z_0 - z^{(j)} | \rho^{-1}]^{r-\nu+1} \leqslant 1,$$

что и доказывает соотношение (14).

Для оценки интеграла I_4 заметим, что в силу соотношений (10) и (11) $| \beta^{(\nu+1)}(z) | \leqslant \mu(\rho) \rho^{r-\nu}$. Используя формулу Коши — Помпея, находим

$$| I_4 | = \left| (\nu + 1)! (\pi)^{-1} \iint_U \partial\beta^*(\zeta)/\partial\bar{\zeta} (\zeta - z)^{-(2+\nu)} d\sigma_\zeta \right| = \left| (\nu + 1)! (2\pi i)^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times \int_{\partial U} \beta^*(\zeta) (\zeta - z)^{-(2+\nu)} d\zeta - \beta^{(\nu+1)}(z) \right| \leqslant \mu(\rho) \rho^{r-\nu}.$$

Сопоставляя (13), (14), (18) и устремляя z к z_0, получаем утверждение теоремы 1.

1. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— 272 с.
2. *Шевчук И. А.* О конструктивной характеристике классов $D^r H^{\omega_2(t)}$ на замкнутых множествах с кусочно-гладкой границей.— Укр. мат. журн., 1973, 25, № 1, с. 81—91.
3. *Шевчук И. А.* Конструктивная характеристика классов непрерывных на множестве $\mathfrak{M} \subset C$ функций для k-го модуля непрерывности.— Мат. заметки, 1979, 25, № 2, с. 225—249.
4. *Дзядык В. К.* К теории приближений функций на замкнутых множествах комплексной плоскости.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1975, 134, с. 63—114.
5. *Тамразов П. М., Белый В. И.* Полиномиальные приближения и модули гладкости функций в областях с квазиконформной границей.— Сиб. мат. журн., 1981, 21, № 3, с. 162—176.
6. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasiconformal mappings in the plane.— Berlin etc.: Springer.— 260 p.
7. *Андриевский В. В.* Некоторые свойства континуумов с кусочноквазиконформной границей.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 4, с. 435—440.
8. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М: Наука, 1977.— 512 с.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2-х т.— М.: Наука, 1968.— Т. 2. 624 с.
10. *Андриевский В. В.* Прямые теоремы приближения на квазиконформных дугах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, 44, № 2, с. 243—261.
11. *Тамразов П. М.* Конечно-разностные гладкости и полиномиальные приближения.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975.— 24 с.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила в редакцию 14.01.1980 г.
после переработки 25.12.1980 г.