УДК 517.968

Л. В. Новикова

Линейные нормализующие преобразования для одного класса нелинейных операторов в пространствах Соболева

Пусть W_m — пространство Соболева 2π-периодических комплекснозначных функций $u(x)=\sum\limits_{n\in Z} u_n e^{inx}$ с нормой $\|u\|_{W_m}=\left[\sum\limits_{n\in Z}(|n|+1)^{2m}|u_n|^2\right]^{1/2}$, A — линейный оператор, $A: W_m\to W_m$, $Ae^{inx}=\lambda_n e^{inx}$, $\Phi: W_m\to W_m$ — аналитическая по Фреше нелинейность, т. е. $\Phi(u)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\Phi_k(u)$, $\Phi_k(u)=\tilde{\Phi}_k\underbrace{(u,\dots,u)}_{k}$, $\tilde{\Phi}_k:\underbrace{W_m\times\dots\times W_m}_{k}\to W_m$ — k-линейный непрерывный симметричный оператор, радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\|\tilde{\Phi}_k\| z^k$ больше нуля.

Будем исследовать вопрос о разрешимости (относительно H) уравнения

$$H^{-1}\circ(A+\Phi)\circ H(v)=Av \tag{1}$$

в некоторой окрестности S нуля в W_m, где $H: S\to W_m$ — аналитический по Фреше диффеоморфизм на свой образ, с тождественной в нуле линейной частью. Приведенная ниже теорема представляет собой бесконечномерный вариант теоремы К. Л. Зигеля и доказывается с помощью метода ускоренной сходимости Колмогорова—Арнольда—Мозера [1].

Существенным отличием бесконечномерной задачи сопряжения (1) от соответствующих конечномерных задач является то, что даже при отсутствии малых знаменателей оператор $L:\Phi\to h$, сопоставляющий аналитической по Фреше нелинейности $\Phi(v)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\Phi_k(v)$ решение $h(v)$ коммутационного уравнения $Ah(v)-h(Av)=-\Phi(v)$, не является в соответствии с определением В. И. Арнольда [2] оператором конечного порядка. В связи с этим решение уравнения (1) для произвольной аналитической по Фреше нелинейности $\Phi(u)$ невозможно. Ниже будет выделен класс M нелинейностей $\Phi(u)$, для которых (при обычных ограничениях на малость знаменателей $\lambda_n-\lambda_{p_1}\dots\lambda_{p_k}$) оператор L оказывается оператором конечного порядка и уравнение (1) разрешимо.

Обозначим через M класс аналитических по Фреше нелинейных операторов $h(u)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}h_k(u)$

$$h_k(u)_n=1/2\pi\int\limits_0^{2\pi}h_k(u)e^{-inx}dx=\sum_{p_1,\dots,p_k\in Z}h^n_{p_1,\dots,p_k}u_{p_1}\dots u_{p_k},$$

$$u_n=1/2\pi\int\limits_0^{2\pi}ue^{-inx}dx,$$

таких, что найдутся функции $f_k\in W_m$, для которых

$$|h^n_{p_1,\dots,p_k}|\leqslant 1/2\pi\int\limits_0^{2\pi}f_k(x)e^{-i(n-p_1-\dots-p_k)x}dx=f_{k,n-p_1-\dots-p_k}$$

и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=2}^{\infty}\|f_k\|_{W_m}z^k$, $z\in C$, больше нуля. Заметим, что n-й коэффициент Фурье функции $f_k(x)u^k$ равен

$$\sum_{p_1,\ldots,p_k\in Z} f_{k,n-p_1-\ldots-p_k}u_{p_1}\ldots u_{p_k}.$$

Теорема. *Пусть собственные значения* λ_n *линейного унитарного оператора* A *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\lambda_n-\prod_{j=1}^{k}\lambda_{p_j}\right|\geqslant 1/k^s,\ n,p_1,\ldots,p_k\in Z,\ k=2,3,\ldots,s>1, \qquad (2)$$

и нелинейность Φ *принадлежит классу* M. *Тогда найдутся окрестность* S *нуля в* W_m *и диффеоморфизм* $H: S\to W_m$ *окрестности* S *на свой образ такие, что* $H=I+h$, $h\in M$, *и для всех* $v\in S$ *выполнено соотношение* (1).

Доказательство проводится при помощи метода ускоренной сходимости. Рассмотрим уравнение

$$(I+h)^{-1}\circ(A+\Phi)\circ(I+h)(v)=Av,\quad h\in M, \qquad (3)$$

и выделим в его левой части члены, линейные по h и по Φ, для чего заменим h на εh, Φ на $\varepsilon\Phi$. Тогда

$$(I+\varepsilon h)^{-1}\circ(A+\varepsilon\Phi)\circ(I+\varepsilon h)(v)=Av+\varepsilon[Ah(v)-h(Av)+\Phi(v)]+o(\varepsilon^2). \qquad (4)$$

Не имея возможности решить сразу уравнение (3), найдем решение h линеаризованного (относительно h и Φ) уравнения (3)

$$Av+Ah(v)-h(Av)+\Phi(v)=Av,\ \text{или}$$

$$Ah(v)-h(Av)=-\Phi(v). \qquad (5)$$

Если коммутационное уравнение (5) разрешимо относительно h, то $H=I+h$ — приближенное решение уравнения (3). Положим $h=h^0$, $f^0=A+\Phi$ и $f^1(v)=Av+\Phi^1(v)=(I+h^0)^{-1}\circ f^0\circ(I+h^0)(v)$. Выражение (4) показывает, что если нелинейность $\Phi(v)$ имела порядок малости ε, то $\Phi^1(v)\sim\varepsilon^2$. Аналогично, если уже известны $f^n=A+\Phi^n$, то h^n находим из уравнения $Ah^n(v)-h^n(Av)=-\Phi^n(v)$ и полагаем $f^{n+1}(v)=Av+\Phi^{n+1}(v)=(I+h^n)^{-1}\circ f^n\circ(I+h^n)(v)$. С формальной точки зрения этот процесс сходится квадратично: если ошибка f^n-A имеет в норме W_m порядок ε_n, то уже $f^{n+1}-A$ имеет в норме W_m порядок $\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n^2$.

Итак, рассмотрим уравнение (5), которое в силу того, что $h(v)=\sum_{k=2}^{\infty}h_k(v)$, $\Phi(v)=\sum_{k=2}^{\infty}\Phi_k(v)$, распадается на систему $Ah_k(v)-h_k(Av)=-\Phi_k(v)$, $k=2,3,\ldots$. Распишем k-е уравнение этой системы в виде

$$A\sum_{n\in Z}h_k(v)_n e^{inx}-\sum_{n\in Z}h_k\left(A\sum_{n\in Z}v_ne^{inx}\right)_n e^{inx}=-\sum_{n\in Z}\Phi_k(v)_n e^{inx}.$$

Приравнивая коэффициенты вначале при одинаковых степенях e^{inx}, а затем при одинаковых произведениях $v_{p_1}\ldots v_{p_k}$, учитывая, что

$$h_k(v)_n=\sum_{p_1,\ldots,p_k\in Z}h^n_{p_1,\ldots,p_k}v_{p_1}\ldots v_{p_k},\quad \Phi_k(v)_n=\sum_{p_1,\ldots,p_k\in Z}\varphi^n_{p_1,\ldots,p_k}v_{p_1}\ldots v_{p_k},$$

получаем соотношение

$$h^n_{p_1,\ldots,p_k}=-\varphi^n_{p_1,\ldots,p_k}/(\lambda_n-\lambda_{p_1}\ldots\lambda_{p_k}). \qquad (6)$$

Первый шаг доказательства состоит в оценке решения уравнения (5).

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(u)=\sum_{k=2}^{\infty}\Phi_k(u)$ *и* $\bar f(u)=\sum_{k=2}^{\infty}\bar f_k(x)u^k$, *причем* $|\varphi^n_{p_1,\ldots,p_k}|<\bar f_{k,n-p_1-\ldots-p_k}$, *т. е.* $\Phi\in M$ *и пусть* $h(u)=\sum_{k=2}^{\infty}h_k(u)$ — *решение уравнения* (5). *Тогда* $h\in M$ *и справедлива оценка*

$$\sup_{\|u\|\leqslant r(1-s\theta)}\|h(u)\|\leqslant \varepsilon/\theta^{2s},\ \text{где}\ \varepsilon=\max_{\|u\|\leqslant r}\|\bar f(u)\|. \tag{7}$$

Доказательство. Оценим $h^n_{p_1,\ldots,p_k}$, используя неравенства (2) и соотношения (6) $|h^n_{p_1,\ldots,p_k}|=|-\varphi^n_{p_1,\ldots,p_k}/(\lambda_n-\lambda_{p_1}\ldots\lambda_{p_k})|\leqslant k^s\bar f_{k,n-p_1-\ldots-p_k}$. Тем самым доказано, что $h\in M$. Оценим $\|h(u)\|_{W_m}$, используя лемму 7, помещенную в конце статьи, и применяя неравенства $|h^n_{p_1,\ldots,p_k}|\leqslant\leqslant k^s\bar f_{k,n-p_1-\ldots-p_k}$.

$$\|h(u)\|_{W_m}=\left[\sum_{n\in Z}(|n|+1)^{2m}\left|\sum_{k=2}^{\infty}h_k(u)_n\right|^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{n\in Z}(|n|+1)^{2m}\left|\sum_{k=2}^{\infty}k^s(\bar f_k(x)\bar u^k)_n\right|^2\right]^{1/2}=\left\|\sum_{k=2}^{\infty}k^s\bar f_k(x)\bar u^k\right\|_{W_m}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}k^s\|\bar f_k\|\|u\|^k l_m^k.$$

Здесь $\bar u(x)=\sum_{n\in Z}|u_n|e^{inx}$, причем $\|\bar u\|_{W_m}=\|u\|_{W_m}$. Таким образом,

$$\sup_{\|u\|\leqslant\rho/l_m}\|h(u)\|\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}k^s\|\bar f_k\|\rho^k.$$

К правой части применим лемму 6. Тогда

$$\max_{|\rho|\leqslant r(1-s\theta)}\left|\sum_{k=2}^{\infty}k^s\|\bar f_k\|\rho^k\right|\leqslant\max_{|\rho|\leqslant r}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\|\bar f_k\|\rho^k\right|/\theta^{2s}\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=2}^{\infty}\|\bar f_k\|r^k\right|/\theta^{2s}=\max_{\|u\|\leqslant r}\|\bar f(u)\|/\theta^{2s}=\varepsilon/\theta^{2s}.$$

Отсюда получаем требуемую оценку (7).

Лемма 2. *Если*

$$\varepsilon<r\theta^{2s+3},\quad 0<\varepsilon<\theta<1/5 \tag{8}$$

и h — *решение уравнения* (5), *то для* $0<r<1$

$$\sup_{\|u\|\leqslant r(1-(s+1)\theta)}\|(I+h)^{-1}(u)\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon/(r\theta^{2s+2}))^k.$$

Доказательство. Имеем для $u_0\in\{u\in U:\|dh/du\|<1\}$

$$\|d(I+h)^{-1}(v)/dv|_{v_0=H(u_0)}\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}(-dh/du|_{u_0})^k\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|dh/du|_{u_0}\|^k.$$

Тогда для $p<1$

$$\sup_{\|v\|\leqslant p}\|(I+h)^{-1}(v)\|\leqslant\sup_{\|v_0\|\leqslant p}\|d(I+h)^{-1}(v)/dv|_{v_0=H(u_0)}\|\cdot p\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\|H(u_0)\|\leqslant p}\sum_{k=0}^{\infty}\|dh/du|_{u_0}\|^k.$$

Имеем

$$\sup_{\|u_0\|\leqslant r(1-s\theta)} \|H(u_0)\| \geqslant \sup_{\|u_0\|\leqslant r(1-s\theta)} \|u_0\| - \sup_{\|u_0\|\leqslant r(1-s\theta)} \|h(u_0)\| \geqslant r(1-(s+1)\theta). \tag{9}$$

Тогда, взяв в качестве $p = r(1-(s+1)\theta)$, получим

$$\sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+1)\theta)} \|(I+h)^{-1}(v)\| \leqslant \sup_{\|H(u_0)\|\leqslant r(1-(s+1)\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \|dh/du|_{u_0}\|^k \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|u_0\|\leqslant r(1-s\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \|dh/du|_{u_0}\|^k.$$

Оценивая по лемме 6 неравенство

$$\sup_{\|u\|\leqslant r(1-s\theta)} \|dh/du\| \leqslant \max_{|\rho|\leqslant r(1-s\theta)} \sum_{k=2}^{\infty} k^{s+1} \|\bar{f}_k\| \rho^{k-1} \leqslant \varepsilon/(r\theta^{2s+2}), \tag{10}$$

получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Если ε и θ удовлетворяют неравенствам* (8), *то*:
1) *отображение $z = H_0(v) = (I+h^0)(v) = v + h^0(v)$ переводит шар $\|v\| \leqslant r(1-(s+3)\theta)$ внутрь шара $\|z\| \leqslant r(1-(s+2)\theta)$*
2) *образ шара $\|v\| \leqslant r(1-s\theta)$ содержит шар $\|z\| \leqslant r(1-(s+1)\theta)$.*

Доказательство. Оценки

$$\sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|(I+h^0)(v)\| \leqslant \sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|v\| +$$

$$+ \sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|h^0(v)\| \leqslant r(1-(s+2)\theta)$$

доказывают утверждение 1) леммы. Утверждение 2) леммы уже доказано с помощью выкладок (9).

Лемма 4. *Если ε и θ удовлетворяют неравенствам* (8), *то отображение $f^1(v) = Av + \Phi^1(v) = H_0^{-1} \circ f^0 \circ H_0(v)$ определено при $\|v\| \leqslant r(1-(s+3)\theta)$ и справедлива оценка*

$$\sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|\Phi^1(v)\| \leqslant 5\varepsilon^2/(r\theta^{2s+2}). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $z = (I+h^0)(v) = v + h^0(v)$, тогда по лемме 3 при отображении H_0 шар $\|v\| \leqslant r(1-(s+3)\theta)$ переходит внутрь шара $\|z\| \leqslant r(1-(s+2)\theta)$. Положив $z_1 = f^0 \circ (I+h^0)(v) = f^0(z) = Az + \Phi(z)$, оцениваем

$$\|z_1\| \leqslant \sup_{\|z\|\leqslant r(1-(s+2)\theta)} \|Az\| + \sup_{\|z\|\leqslant r(1-(s+2)\theta)} \|\Phi(z)\| \leqslant r(1-(s+1)\theta).$$

Итак, отображение $z_1 = f^0 \circ (I+h^0)(v)$ определено в шаре $\|z_1\| \leqslant r(1-(s+1)\theta)$. По лемме 3 в этом шаре определено также отображение $H_0^{-1} = (I+h^0)^{-1}$. Следовательно, отображение $f^1(v) = H_0^{-1} \circ f^0 \circ H_0(v)$ определено для $\|v\| \leqslant r(1-(s+3)\theta)$. Имеем $\Phi^1(v) + h^0(Av + \Phi^1(v)) = Ah^0(v) + \Phi(v + h^0(v))$. Так как $h^0(v)$ — решение уравнения $Ah^0(v) = h^0(Av) - \Phi(v)$, то $\Phi^1(v) = h^0(Av) - h^0(Av + \Phi^1(v)) + \Phi(v + h^0(v)) - \Phi(v)$.

Пользуясь неравенствами (8), находим

$$\sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|h^0(Av) - h^0(Av + \Phi^1(v))\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|v\|\leqslant r(1-(r+3)\theta)} \|dh^0/dv\| \sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|\Phi^1(v)\| \leqslant 1/5 \sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|\Phi^1(v)\|.$$

В силу леммы 6 $\sup_{\|v\|\leqslant r(1-s\theta)} \|d\Phi(v)/dv\| \leqslant \varepsilon/(rs^2\theta^2)$.

Отсюда получаем, что

$$\sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|\Phi(v + h^0(v)) - \Phi(v)\| \leqslant \sup_{\|v\|\leqslant r(1-s\theta)} \|d\Phi(v)/dv\| \times$$

$$\times \sup_{\|v\|\leqslant r(1-s\theta)} \|h^0(v)\| \leqslant \varepsilon^2/(rs^2\theta^{2s+2}).$$

Следовательно, $4/5 \sup_{\|v\|\leqslant r(1-(s+3)\theta)} \|\Phi^1(v)\| \leqslant \varepsilon^2/(rs^2\theta^{2s+2})$. Лемма доказана.

Итак, мы сумели преобразовать первоначальное отображение $f^0 = A + \Phi$, удовлетворяющее неравенству $\sup\limits_{\|v\| \leqslant r} \|\Phi(v)\| < \varepsilon$, в новое отображение $f^1 = A + \Phi^1$, которое значительно ближе к линейному.

Лемма 5. *Пусть последовательность* $\{\delta_n\}$ *определена следующим образом*: δ_0 *удовлетворяет неравенствам* (8) *при* $\varepsilon = \delta_0$, $r = \rho_0$, $\theta = \zeta_0$ *и* $\delta_{n+1} = 5\delta_n^2/(\rho_n \zeta_n^{2s+2})$, *причем* $\rho_n = r(1 + 2^{-n})/2$, $(s+3)\zeta_n = 1/(2(2^n+1))$, *тогда неравенства* (8) *выполняются и для* $\varepsilon = \varepsilon_n$, $\theta = \theta_n$, $r = r_n$, *если положить* $\varepsilon_n = \delta_{n+2s+6}$, $\theta_n = \zeta_{n+2s+6}$, $r_n = \rho_{n+2s+6}$.

Доказательство тривиально. Заметим, что $r_n > r/2$, $r_{n+1}/r_n = 1 - (s+3)\theta_n$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Переходя непосредственно к доказательству теоремы, покажем, что построенная выше последовательность нелинейностей Φ^n стремится к нулю в шаре радиуса $r/2$. Действительно, если $f^n(v) = Av + \Phi^n(v)$ и в шаре $\|v\| \leqslant r_n$ выполняется оценка $\sup\limits_{\|v\| \leqslant r_n} \|\Phi^n(v)\| \leqslant \varepsilon_n$, то из леммы 4 следует, что отображение $f^{n+1}(v) = Av + \Phi^{n+1}(v) = (I + h^n)^{-1} \circ f^n \circ (I + h^n)(v)$ удовлетворяет в шаре $\|v\| \leqslant r_{n+1}$ неравенству

$$\sup_{\|v\| \leqslant r_{n+1}} \|\Phi^{n+1}(v)\| \leqslant 5\varepsilon_n^2/(r_n \theta_n^{2s+2}) = \varepsilon_{n+1}.$$

Для того чтобы доказать сходимость f^n к линейному отображению, достаточно доказать, что последовательность ε_n, определяемая равенством $\varepsilon_{n+1} = 5\varepsilon_n^2/(r_n \theta_n^{2s+2})$, стремится к нулю.

Оценивая ε_{n+1}, находим $\varepsilon_{n+1} \leqslant c_0^{n+1} \varepsilon_n^2$, где $c_0 = 10 \cdot 16^{s+1}(s+3)^{2s+2}/r$, $n = 0, 1, \ldots$. Последовательность $\varepsilon'_n = c_0^{n+2} \varepsilon_n$ удовлетворяет неравенству $\varepsilon'_{n+1} \leqslant \varepsilon'^2_n$, так как $\varepsilon'_{n+1} \leqslant \varepsilon'^2_n$. Значит, последовательность f^n для $\varepsilon_0 = c_0^2 \varepsilon_0 < 1$ сходится, а для $\varepsilon = \varepsilon_n$, $\theta = \theta_n$ она сходится в силу леммы 5.

Итак, мы построили такую последовательность отображений $H_0, H_1, \ldots, H_n$, что $f^n(v) = (H_0 \circ \ldots \circ H_{n-1})^{-1} \circ f^0 \circ (H_0 \circ \ldots \circ H_{n-1})(v)$.

Обозначим $u_n = H_0 \circ \ldots \circ H_{n-1}$. Отображение u_n преобразует f^0 в $f^n = u_n^{-1} \circ f^0 \circ u_n$, причем, по лемме 3, отображение u_n определено в шаре $\|v\| \leqslant r_{n-1}$. В самом деле, H_{n-1} отображает шар $\|v\| \leqslant r_{n-1}$ в шар $\|v\| \leqslant r_{n-2}$, и т. д.

Из построения отображения f^n следует, что оно определено для $\|v\| \leqslant r_{n-1}$. Докажем теперь, что последовательность u_n равномерно сходится в шаре $\|v\| < r/2$. Заметим, что $u_{n+1}(v) = u_n \circ H_n(v) = u_n(v + h^n(v))$. Оценим

$$\sup_{\|v\| \leqslant r_n} \|u_{n+1}(v) - u_n(v)\| \leqslant \sup_{\|v\| \leqslant r_n} \|u_n(v + h^n(v)) - u_n(v)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|v\| \leqslant r_n} \|du_n/dv\| \sup_{\|v\| \leqslant r_n} \|h^n(v)\|.$$

Рассмотрим произведение

$$du_n(v)/dv = \prod_{\nu=0}^{n-1} dH_\nu(v)/dv = \prod_{\nu=0}^{n-1} (I + dh^\nu/dv)(v),$$

где производная $dh^\nu(v)/dv$ вычисляется в точке $h^{\nu+1} \circ h^{\nu+2} \circ \ldots \circ h^{n-1}(v)$. Применяя оценку (10), получим $\sup\limits_{\|v\| \leqslant r_\nu} \|dh^\nu(v)/dv\| \leqslant c_1^\nu \varepsilon_\nu$. Таким образом, бесконечное произведение $\prod\limits_{\nu=0}^{\infty} (1 + \sup\limits_{\|v\| \leqslant r_\nu} \|dh^\nu(v)/dv\|)$ сходится в шаре $\|v\| \leqslant r/2$. Отсюда следует, что $\sup\limits_{\|v\| \leqslant r_n} \|u_{n+1}(v) - u_n(v)\| \leqslant c_2 \sup\limits_{\|v\| \leqslant r_n} \|h^n(v)\| \to 0$, $n \to +\infty$. Таким образом, последовательность $u_n(v)$ сходится к некоторому пределу

$H(v) = v + h(v)$, $h \in M$ и $f^n(v) \to Av$. Следовательно, $H^{-1} \circ f^0 \circ H(v) = Av$. Теорема доказана, если только $\varepsilon = \sup\limits_{\|u\| \leqslant r} \|\bar{f}(u)\|$ выбрано достаточно малым.

Заметим, что неравенства (2) имеют место, если собственные значения λ_n линейного оператора A вида $e^{2\pi i(\alpha_n + \beta)}$, где $\alpha_n \in Z$, а β — иррациональное вещественное число, удовлетворяющее неравенствам $|n\beta + m| \geqslant c/|n|^s$, $s > 1$, $c > 0$, $n, m \in Z$. Примером может служить оператор $A = e^{i(d^2/dx^2 + \beta)}$. В этом случае $\alpha_n = -n^2$.

Заметим, что в качестве $A + \Phi$ может выступать, например, оператор сдвига N_t на время t по траекториям в пространстве W_m системы

$$i\partial u/\partial t = \beta u_{xx} + f_1 u + \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x) u^k, \tag{12}$$

$f_k \in W_{m+2}$, f_1 — вещественное число. Применяя теорему, мы получим, что для каждого вещественного t найдется оператор $h_t \in M$, такой, что

$$(I + h_t)^{-1} \circ N_t \circ (I + h_t) = e^{i(d^2/dx^2 + f_1)t}.$$

Вопрос о приводимости уравнения (12) к линейной нормальной форме исследован в работах [3, 4].

Лемма 6. *Пусть $r_0 > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ и $r \in (0, \min\{1, r_0\})$, $\varepsilon = \max\limits_{|x| \leqslant r} |f(x)|$. Тогда для любого натурального числа n и $|x| < r$ справедливы неравенства*

$$\max_{|x| \leqslant r(1-\theta)} |df/dx| \leqslant \varepsilon/(r\theta^2) \text{ и } \max_{|x| \leqslant r(1-n\theta)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^n f_k x^k \right| \leqslant \varepsilon/\theta^{2n}.$$

Доказательство. Из неравенств Коши для коэффициентов аналитической функции следует, что $|f_k| < \varepsilon r^{-k}$. Значит, для $|x| < r$ имеют место оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} k f_k x^{k-1} \leqslant \left(\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} k (x/r)^{k-1} \right) / r = \varepsilon r/(r - x)^2,$$

$$\max_{|x| \leqslant r(1-n\theta)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^n f_k x^k \right| = \max_{|x| \leqslant r(1-n\theta)} |x| \left| \sum_{k=1}^{\infty} k k^{n-1} f_k x^{k-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \theta^{-2} \max_{|x| \leqslant r(1-(n-1)\theta)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} f_k x^k \right| \leqslant \theta^{-2n} \max_{|x| \leqslant r} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^k \right|,$$

доказывающие лемму.

Лемма 7. *Для каждого натурального m существует постоянная $l_m > 1$ такая, что для всех $u, v \in W_m$ имеет место неравенство $\|uv\|_{W_m} \leqslant \leqslant l_m \|u\|_{W_m} \|v\|_{W_m}$.*

Доказательство. Пусть $u, v \in W_m$. Пользуясь неравенствами Соболева для $0 \leqslant k < m$

$$\|u^{(k)}\|_{c[0,2\pi]} \leqslant K \|u^{(k)}\|_{W_1} \leqslant K \|u\|_{W_m}, \quad K = \sqrt{\sum_{n \in Z} 1/(|n| + 1)^2},$$

получаем оценки

$$\|u^{(k)} v^{(m-k)}\|_{L_2[0,2\pi]} \leqslant 2\pi K \|u\|_{W_m} \|v\|_{W_m}, \quad \|uv\|_{L_2} \leqslant 2\pi K \|u\|_{W_m} \|v\|_{W_m},$$

откуда, применяя разложение $d^m(uv)/dx^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}$, находим

$$\|uv\|_{W_m} \leqslant 2\pi a K \left[C^2(m+1)^2+1\right]^{1/2} \|u\|_{W_m} \|v\|_{W_m}, \; C = \max_{k=0,1,\ldots,m} C_m^k,$$

$$a^2 = \max_{n \in Z} (|n|+1)^{2m}/(n^{2m}+1) = 2^{2m-1}.$$

Таким образом, в качестве постоянной l_m можно принять $\pi K 2^{m+1/2} \times \times \sqrt{C^2(m+1)^2+1}$. Лемма доказана.

1. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.— Успехи мат. наук, 1968, 23, вып. 4, с. 180—237.
2. *Арнольд В. И.* Особенности гладких отображений.— Успехи мат. наук, 1968, 23, вып. 1, с. 3—43.
3. *Николенко Н. В.* О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера.— Функц. анализ, 1976, вып. 3, с. 55—69.
4. *Николенко Н. В.* Полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера. — Докл. АН СССР, 1976, 227, № 2, с. 295—298.

Ростовский
государственный университет

Поступила в редакцию
11.11.1980 г.