УДК 517.518.361

В. А. Андриенко, Л. В. Гърневска

О скорости приближения функций их ортогональными рядами по системам сходимости

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

— ортогональный ряд по системе сходимости $\{\varphi_n(x)\}$ на $[a, b]$ (определение см. [1, с. 357]), коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda_n^2 < \infty, \quad \lambda_n > 0, \quad \lambda_n \uparrow \infty. \tag{2}$$

Ряд (1), (2) сходится почти всюду к некоторой функции $f(x) \in L^2(a, b)$, рядом Фурье которой он является. Целью данной работы является получение точных оценок скорости сходимости ряда (1), (2). Для ортогональных рядов по произвольным системам $\{\varphi_n(x)\}$ такие оценки получены в работах [2—5]. Покажем, что оценки в случае систем сходимости существенно отличаются от общего случая тем, что не зависят от порядка роста λ_n и не гарантируют наличие мажорант $F(x) \in L^2(a, b)$ (см. [3, с. 17]).

Теорема 1. *Пусть $s_n(x; f)$ — частные суммы ряда (1), (2). Тогда почти всюду на $[a, b]$ имеет место оценка*

$$f(x) - s_n(x; f) = o(\lambda_{n+1}^{-1}), \tag{3}$$

где (3) означает, что почти всюду на $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n+1}[f(x) - s_n(x; f)] = 0, \tag{4}$$

и существует почти всюду конечная на $[a, b]$ функция $F(x)$ такая, что для всех $x \in [a, b]$ и $n \in \mathbf{N}$

$$\lambda_{n+1} |f(x) - s_n(x; f)| \leqslant F(x). \tag{5}$$

Доказательство проводится по схеме рассуждений из [2] с одним отличием: система сходимости гарантирует наличие лишь почти всюду конечной мажоранты $F(x)$ в (5). Если же система $\{\varphi_n(x)\}$ такова, что

$$\sup_n |s_n(x; f)| \in L^2(a, b) \quad \forall f(x) \in L^2(a, b), \tag{6}$$

то $F(x) \in L^2(a, b)$.

Замечание 1. Для отдельных функций $f(x) \in L^2(a, b)$ оценка может оказаться существенно лучше, чем (3). Например, так обстоит дело для любого «полинома» по системе $\{\varphi_n(x)\}$, т. е. для функций вида $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$. Однако на всем классе систем сходимости теорема 1 неусиляема.

Теорема 2. *Если последовательности $\Lambda_n \uparrow \infty$ и $\lambda_n \uparrow \infty$ таковы, что $\lambda_n = o(\Lambda_n)$, то существует ортогональный ряд (1), (2) по системе сходимости $\{\varphi_n(x)\}$, для которого почти всюду на $[a, b]$ (или всюду —*

после возможного изменения функций системы на множестве меры нуль) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \Lambda_{n+1} | f(x) - s_n(x; f) | = +\infty$.

Доказательство. Утверждение теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 3 работы [3], так как указанная теорема 3 реализуется на системе Радемахера.

Для систем сходимости со свойством (6) имеет место теорема

Теорема 3. *Если* $\Lambda_n \uparrow \infty$ *и* $\lambda_n \uparrow \infty$ *таковы, что* $\lambda_n = o(\Lambda_n)$, *то для любого ряда* (1), (2) *соотношения* (4) *и* (5) *с* Λ_{n+1} *вместе* λ_{n+1} *одновременно не могут иметь места.*

Доказательство. Отметим, что в (5) мажоранта $F(x) \in L^2(a, b)$. Легко видеть, что тогда можно использовать схему рассуждений из [4] без каких-либо ограничений на рост λ_n. В итоге теорема 3 доказывается без труда.

Замечание 2. Теорема 2 показывает, что теорема 1 точна для системы Радемахера. Нельзя, однако, утверждать, что теорема 1 точна для каждой системы сходимости.

Действительно, рассмотрим систему Хаара (см. [6, с. 54]) $\chi_0^0(x)$, $\chi_k^{(j)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $1 \leqslant j \leqslant 2^k$; $0 \leqslant x \leqslant 1$, упорядоченную обычным образом

$$\chi_1(x) = \chi_0^0(x),\ \chi_n(x) = \chi_k^{(j)}(x),\ \text{если}\ n = 2^k + j,\quad k \geqslant 0;\ 1 \leqslant j \leqslant 2^k. \tag{7}$$

Выделим из нее подсистему $\{\chi_k^{(1)}(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, которая, очевидно, является системой сходимости. Тогда при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\{x \in [0, 1] : \chi_k^{(1)}(x) \neq 0\} = [0, 2^{-k-1}) \cup (2^{-k-1}, 2^{-k}). \tag{8}$$

Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k^{(1)}(x)$ — произвольный ряд по этой системе, удовлетворяющий условию (2). Из (8) следует, что для любого $x \in (0, 1)$ найдется такой номер $N = N(x)$, что $\chi_n^{(1)}(x) = 0$ для $n \geqslant N$. Тогда в точке x

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_k^{(1)}(x) = s_n(x; f)\ \text{для}\ n \geqslant N,$$

и для любой последовательности $\Lambda_n \uparrow \infty$ всюду на $(0, 1)$ имеем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \Lambda_{n+1} |f(x) - s_n(x; f)| = 0$.

В связи с замечанием 2 возникает вопрос: является ли точной теорема 1 для классических систем сходимости Хаара, Уолша—Пэли, тригонометрической? Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

Теорема 4. *Теорема 1 точна для систем Хаара, Уолша—Пэли и тригонометрической системы в смысле, указанном в теореме 2.*

Доказательство. Рассмотрим систему Уолша — Пэли $\{w_n(x)\}$, ортонормированную на $[0, 1]$ (см. [6, с. 67]). Поскольку $\{w_n(x)\}$ — система сходимости и $|w_n(x)| = 1$ почти всюду на $[0, 1]$, то доказательство теоремы 3 из [3, с. 23 — 24] годится и в случае системы Уолша — Пэли, так как оно опирается на аналогичные свойства системы Радемахера.

Рассмотрим систему Хаара (7). Известна связь между системами Уолша и Хаара: разложения одной и той же функции $f(x) \in L(0, 1)$ по этим системам имеют совпадающие почти всюду частные суммы порядка 2^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. [1, с. 155]).

Пусть $p_n(x; f)$ и $h_n(x; f)$ — частные суммы разложений функции $f(x)$ по системам $\{w_n(x)\}$ и $\{\chi_n(x)\}$. Используя схему доказательства теоремы 3 из [3] при доказательстве первой части теоремы 4 (случай системы Уолша — Пэли), можно определить последовательность индексов $\{n_k\}$ так, чтобы она имела вид $n_k = 2^{m_k} + 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. [3, с. 23]). В итоге (см. [3, с. 24]) $\Lambda_{2^{m_{k+1}}} | f(x) - p_{2^{m_k}}(x; f) | = \Lambda_{2^{m_{k+1}}} | f(x) - h_{2^{m_k}}(x; f) | \geqslant k -$

$-k^{-2}$ для почти всех $x \in [0, 1]$. Это означает, что почти всюду на $[0, 1]$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \Lambda_{n+1} | f(x) - h_n(x; f) | = +\infty$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим тригонометрическую систему $\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$. Определим по индукции последовательность целых положительных чисел $n_k \uparrow \infty$ таких, что

$$\Lambda_{n_k} \lambda_{n_k}^{-1} \geqslant k^3, \quad \Lambda_{n_k} \lambda_{n_{k+1}}^{-1} \leqslant k^{-1}. \tag{9}$$

Пусть $0 < \delta_k < 1$, положим $m_k = \{x \in [-\pi, \pi] : |\cos n_k x| < \delta_k\}$ и оценим его меру $|m_k|$. Легко видеть, что $|m_k| \leqslant C\delta_k$, где $C > 0$. Рассмотрим множество $m = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=p}^{\infty} m_k$. Покажем, что его мера $|m| = 0$, если δ_k выбрать подходящим образом. Действительно, положим

$$\delta_k = k^{-1-\varepsilon}, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \tag{10}$$

тогда

$$|m| = \lim_{p\to\infty} \Big| \bigcup_{k=p}^{\infty} m_k \Big| \leqslant \lim_{p\to\infty} \sum_{k=p}^{\infty} |m_k| \leqslant C \lim_{p\to\infty} \sum_{k=p}^{\infty} k^{-1-\varepsilon} \leqslant C_1 \lim_{p\to\infty} p^{-\varepsilon} = 0.$$

В таком случае дополнительное множество $M = \overline{m} = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=p}^{\infty} \overline{m}_k$ имеет меру $|M| = 2\pi$. Для любого $x \in M$ существует номер $p_0 = p_0(x)$ такой, что $x \in \bigcap\limits_{k=p_0}^{\infty} \overline{m}_k$, т. е. $x \in \overline{m}_k$ для всех $k \geqslant p_0$. Значит,

$$|\cos n_k x| \geqslant \delta_k, \qquad k \geqslant p_0. \tag{11}$$

Определим коэффициенты a_n, b_n тригонометрического ряда следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} k^{-1}\lambda_{n_k}^{-1}, & \text{если } n = n_k, \\ 0, & \text{если } n \neq n_k \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ — искомый. Из (12) следует, что он сходится почти всюду на $[-\pi, \pi]$ к некоторой функции $f(x)$. Кроме того, выполнено условие (2):

$$a_0^2\lambda_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\lambda_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\lambda_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 \lambda_{n_k}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty.$$

Пусть $x \in M$. Тогда для $k \geqslant p_0$ на основании (9) — (12) имеем

$$\Lambda_{n_k} | f(x) - s_{n_{k-1}}(x; f) | = \Lambda_{n_k} \Big| \sum_{p=k}^{\infty} a_{n_p} \cos n_p x \Big| \geqslant$$

$$\geqslant \Lambda_{n_k} a_{n_k} |\cos n_k x| - \Lambda_{n_k} \Big| \sum_{p=k+1}^{\infty} a_{n_p} \cos n_p x \Big| \geqslant k^{1-\varepsilon} - k^{-1}.$$

Но это означает, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \Lambda_{n+1} | f(x) - s_n(x; f) | = +\infty$. Теорема 4 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 3. Доказанное выше утверждение для системы Уолша—Пэли верно и для любой мультипликативной системы (см. определение в [1, с. 459—460]) сходимости $\{\varphi_n(x)\}$, так как для таких систем $|\varphi_n(x)| = 1$ почти всюду при всех n.

1. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов.— М.: Физматгиз, 1958.— 508 с.
2. *Tandori K.* Über die orthogonalen Funktionen. VII.— Acta sci. math., 1959, 20, S. 19—24.
3. *Андриенко В. А.* О быстроте сходимости ортогональных рядов.— Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика, 1967, № 1, с. 14—24.
4. *Шмандін Ю. М.* До питання про швидкість збіжності ортогональних рядів.— В кн.: Матеріали університетської наукової конференції (природничі науки). Одеса: Одес. ун-т, 1970, с. 87—93.
5. *Коляда В. И.* О скорости сходимости ортогональных рядов.— Укр. мат. журн., 1973, 25, № 1, с. 25—38.
6. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 360 с.

Одесский педагогический институт
Софийский высший машинно-электротехнический институт

Поступила в редакцию
12.09.1980 г.
после переработки
24.10.1981 г.