УДК 519.3:62—50

В. В. Анисович, Б. И. Крюков

О существовании оптимальных периодических решений в линейных системах с импульсным воздействием

Задачи оптимизации периодических движений импульсными управлениями (типа δ-функций) [1], а также оптимизация периодических решений систем с импульсным воздействием исследованы пока не в полной мере [2]. В работе изучается вопрос существования и рассмотрен метод нахождения оптимальных периодических решений в линейно квадратичной задаче с импульсным воздействием.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) + f(t), \quad t \neq t_k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \Delta x\big|_{t=t_k} = x(t_k + 0) - x(t_k - 0) = \nu_k, \quad \nu_k = (\nu_k^1, \dots, \nu_k^n), \quad \nu_k = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерная вектор-функция; $u(t)$ — m-мерная T-периодическая вектор-функция (управление), кусочно-непрерывная с точками разрыва первого рода при $t = t_k$: $f(t)$ — непрерывная T-периодическая n-мерная вектор-функция; $A(t)$, $B(t)$ — непрерывные T-периодические матрицы соответствующих размерностей; $\nu_k = \nu_{k+p}$, $t_{k+p} = t_k + T$ при некотором натуральном p, и последовательность моментов t_k занумерована множеством целых чисел так, что $t_k \to -\infty$ при $k \to -\infty$ и $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Допустимыми будем считать такие $u(t) \in E^m$, которым соответствует единственное T-периодическое решение системы (1). Требуется найти такое допустимое управление $\bar{u}(t) \in E^m$ и соответствующее ему T-периодическое решение $\bar{x}(t)$ системы (1), чтобы функционал

$$J(u) = \int_0^T (u^*Qu + u^*P^*x + x^*Pu + x^*Gx)\,dt \tag{2}$$

($*$ — знак транспонирования) принимал наименьшее значение. $Q(t)$, $P(t)$, $G(t)$ — непрерывные T-периодические по t матрицы, причем $Q(t)$ — положительно определенная при всех $t \in [0, T]$, а $Q(t)$, $G(t)$ — симметрические. Найденное таким образом управление $\bar{u}(t)$ будем называть оптимальным.

Используя правило обобщенного дифференцирования кусочно-дифференцируемых функций [3], получаем

$$\dot{x}(t) = [\dot{x}(t)] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{x(t_k + 0) - x(t_k - 0)\}\,\delta(t - t_k), \tag{3}$$

где $\dot{x}(t)$ — обобщенная производная, а $[\dot{x}(t)]$ — обычная производная, определенная для любых $t \neq t_k$. Так как $[\dot{x}(t)] = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t)$ при $t \neq t_k$, то исходную систему (1) запишем в виде

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k \delta(t - t_k), \tag{4}$$

где $\delta(t - t_k)$ — функция Дирака.

Предположим, что уравнение

$$\dot{N} = NBQ^{-1}B^*N + N(BQ^{-1}P^* - A) + (PQ^{-1}B^* - A^*)N + PQ^{-1}P^* - G \tag{5}$$

имеет единственное T-периодическое решение $N(t)$. Используя последнее предположение, свойства матриц Q, G и транспонируя (5), легко убеждаемся в симметричности матрицы $N(t)$. Будем считать, что система векторных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + BQ^{-1}B^* r(t) + f(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k \delta(t - t_k), \tag{6}$$

$$\dot{r}(t) = -A_1^* r(t) + Nf(t) + N\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k \delta(t - t_k),$$

где $A_1 = A - BQ^{-1}P^* - BQ^{-1}B^*N$, имеет единственное T-периодическое решение.

Теорема 1. *Пусть выполняются все приведенные выше условия и множество допустимых $u(t)$ непустое. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) и оптимальное $\bar{u}(t)$ вычисляется по формуле*

$$\bar{u}(t) = -Q^{-1}[(P^* + B^*N)\bar{x}(t) - B^*\bar{r}(t)], \quad t \neq t_k, \quad \Delta\bar{u}|_{t=t_k} = -Q^{-1}P^*\nu_k, \tag{7}$$

где $\bar{x}(t)$, $\bar{r}(t)$ — T-периодическое решение системы (6).

Доказательство. Приведем функционал (2) к каноническому виду. Для этого, используя (4), (5), выполним преобразования

$$\begin{gathered} x^*Gx = x^*NBQ^{-1}B^*Nx + x^*NBQ^{-1}P^*x + x^*NBu + x^*Nf + \\ + x^*N\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\delta(t - t_k) + x^*PQ^{-1}B^*Nx + u^*B^*Nx + f^*Nx + \\ + \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\delta(t - t_k)\right]^* Nx + x^*PQ^{-1}P^*x - \frac{d}{dt}(x^*Nx). \end{gathered} \tag{8}$$

Подставляя в (8) $Nf + N\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\delta(t - t_k)$, найденное из второго уравнения системы (6) и Ax из (1), получаем

$$\begin{gathered} x^*Gx = x^*NBQ^{-1}B^*Nx + x^*NBQ^{-1}P^*x + x^*PQ^{-1}B^*Nx + \\ + x^*PQ^{-1}P^*x + x^*NBu + u^*B^*Nx - x^*PQ^{-1}B^*r - u^*B^*r - \\ - f^*r - \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\delta(t - t_k)\right]^* r - x^*NBQ^{-1}B^*r - r^*BQ^{-1}P^*x - r^*Bu - \\ - r^*f - r^*\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\delta(t - t_k) - r^*BQ^{-1}B^*Nx + \frac{d}{dt}(x^*r + r^*x - x^*Nx). \end{gathered} \tag{9}$$

Используя T-периодичность $x(t)$, $r(t)$ и (9), функционал (2) запишем в каноническом виде

$$I(u)=\int_0^T K^*QKdt-\int_0^T (r^*BQ^{-1}B^*r+f^*r+r^*f)\,dt-$$

$$-\int_0^T\Big[\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\nu_k\delta(t-t_k)\Big)^*r+r^*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\nu_k\delta(t-t_k)\Big]dt, \qquad (10)$$

где $K=u+Q^{-1}P^*x+Q^{-1}B^*Nx-Q^{-1}B^*r$. В силу положительной определенности матрицы Q функционал (10) имеет минимум при $K=0$, т. е. минимум достигается при $u(t)$, вычисленном по формуле (7). Подставляя (7) в (4), получаем первое уравнение системы (6) для определения $\bar{x}(t)$. Наличие δ-функций в уравнениях системы (6) означает, что $x(t)$, $r(t)$ скачкообразно меняются в моменты $t=t_k$. Пренебрегая слагаемыми в правых частях системы (6), не содержащими δ-функций, в моменты $t=t_k$ можно положить [1] $\dot{x}(t)=\nu_k\delta(t-t_k)$, $\dot{r}(t)=N\nu_k\delta(t-t_k)$ или $\Delta x|_{t=t_k}=\nu_k$, $\Delta r|_{t=t_k}=N\nu_k$. Таким образом,

$$\Delta\bar{u}|_{t=t_k}=-Q^{-1}[(P^*+B^*N)\Delta\bar{x}|_{t=t_k}-B^*\Delta\bar{r}|_{t=t_k}]=-Q^{-1}P^*\nu_k.$$

Теорема доказана.

Проверка условия существования T-периодических решений уравнений (1), (6) проводится в каждом конкретном случае с использованием известных критериев (см., напр., [4]). В стационарном случае, когда A, B, Q, P, G — постоянные матрицы, уравнения (1), (6) имеют единственные T-периодические решения, если можно указать такое $\theta>0$, что $t_{k+1}-t_k\geqslant\theta$ для всех $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ и $\operatorname{Re}\mu_i\neq0$, $\operatorname{Re}\alpha_i\neq0$, $i=1,2,\ldots,n$, где μ_i, α_i — собственные числа матриц A, A_1. Очевидно, что при $\operatorname{Re}\alpha_i<0$ оптимальное решение $\bar{x}(t)$, найденное из системы (6), будет асимптотически устойчивым [5].

Пусть управление периодическим процессом осуществляется двумя участниками $u(t)$ и $v(t)$. Поведение процесса описывается уравнением

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+C(t)v(t)+f(t),\quad t\neq t_k, \qquad (11)$$

$$\Delta x|_{t=t_k}=\nu_k,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

где $\nu_k=\nu_{k+p}$, $t_{k+p}=t_k+T$ при некотором натуральном p и $t_k\to-\infty$ при $k\to-\infty$, $t_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$.

Допустимыми будем считать такие $u(t)\in E^n$, $v(t)\in E^q$, которым соответствует единственное T-периодическое решение уравнения (11), а функционал

$$I(u,v)=\int_0^T(u^*Qu+u^*P^*x+x^*Pu+x^*Gx+v^*Rv)\,dt \qquad (12)$$

принимает конечное значение. Здесь $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $G(t)$, $f(t)$, $x(t)$, $u(t)$ — те же, что и в теореме 1; $v(t)$ — q-мерная T-периодическая вектор-функция, кусочно-непрерывная с точками разрыва первого рода при $t=t_k$; $C(t)$, $R(t)$ — непрерывные T-периодические матрицы размерностей $n\times q$ и $q\times q$ соответственно, причем $R(t)$ — отрицательно определенная при всех $t\in[0,T]$.

Требуется найти такие допустимые $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ и соответствующее им T-периодическое решение $\bar{x}(t)$ системы (II), чтобы выполнялось условие $I(\bar{u},\bar{v})=\min_u\max_v I(u,v)$. Найденные таким образом $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ будем называть оптимальными.

Рассмотрим уравнения

$$\dot{N}_1 + N_1NCR^{-1}C^*NN_1 + N_1(NCR^{-1}C^* + A_1) + (CR^{-1}C^*N + A_1^*)N_1 + \\ + CR^{-1}C^* + BQ^{-1}B^* = 0; \tag{13}$$

$$\dot{r} = A_1r + NCv + Nf + N\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\delta(t - t_k),\ v(t) \in E^q; \tag{14}$$

$$\dot{r}_1 = -A_2r_1 + N_1Nf + N_1N\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\delta(t - t_k); \tag{15}$$

$$\dot{x} = -A_1^*x + (BQ^{-1}B^* + CR^{-1}C^* + CR^{-1}C^*NN_1)r + CR^{-1}C^*Nr_1 + \\ + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\delta(t - t_k) + f, \tag{16}$$

где $A_2 = CR^{-1}C^*N + A_1^* + N_1NCR^{-1}C^*N$. Предположим, что уравнения (13)—(16) имеют единственные T-периодические решения. Выполняя преобразования, аналогичные приведенным в [6], и рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняются все приведенные выше условия и множество допустимых* $u(t)$, $v(t)$ *непустое. Тогда существует единственное решение задачи* (11), (12) *и оптимальные* $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ *вычисляются по формулам*

$$\bar{u}(t) = -Q^{-1}[(P^* + B^*N)\bar{x}(t) - B^*\bar{r}(t)],\ t \neq t_k,\ \Delta u|_{t=t_k} = -Q^{-1}P^*\nu_k; \tag{17}$$

$$\bar{v}(t) = R^{-1}C^*[(E + NN_1)\bar{r}(t) - N\bar{r}_1(t)] \quad t \neq t_k, \\ \Delta v|_{t=t_k} = R^{-1}C^*N\nu_k, \tag{18}$$

где N, N_1, $\bar{x}$, $\bar{r}_1$ — *T-периодические решения уравнений* (5), (13), (16), (15) *соответственно*; E — *единичная матрица*; $\bar{r}(t)$ — *T-периодическое решение уравнения* (14), *соответствующее* (18).

Пусть A, B, C, P, Q, G, R — постоянные матрицы и можно указать такое $\theta > 0$, что $t_{k+1} - t_k \geqslant \theta$ для всех $k = 0, \pm 1, \ldots$. Если $\operatorname{Re}\mu_i \neq 0$, $\operatorname{Re}\alpha_i \neq 0$, $\operatorname{Re}\gamma_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где μ_i, α_i, γ_i — собственные числа матриц A, A_1, A_2 соответственно, то уравнения (11), (14) — (16) имеют единственные T-периодические решения [5]. При дополнительном условии $\operatorname{Re}\alpha_i < 0$ оптимальное решение $\bar{x}(t)$ уравнения (11), соответствующее управлениям (17), (18), асимптотически устойчиво.

Отметим, что при $P = 0$ оптимальное управление $\bar{u}(t)$ в (7), (17) является непрерывной вектор-функцией.

1. *Ларин В. Б.* Синтез оптимального линейного регулятора, осуществляющего непрерывное и импульсное управление.— Мат. физика, 1977, вып. 24, с. 31—37.
2. *Тонков Е. Л.* Оптимальные периодические движения управляемой системы.— Мат. физика, 1977, вып. 24, с. 45—59.
3. *Шилов Г. Е.* Математический анализ : Второй спец. курс.— М.: Наука, 1965.— 327 с.
4. *Халанай В., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М.: Мир, 1971.— 365 с.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1978, № 6, с. 1034—1042.
6. *Анисович В. В.* Синтез оптимального управления в одной минимаксной задаче оптимизации периодических процессов.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 11, с. 184—187.

Брестский
педагогический институт

Поступила в редакцию
26.12.1979 г.