УДК 519.44

Ю. В. Дмитрук

Силовские 2-подгруппы счетной знакопеременной группы

В работе описано строение силовских 2-подгрупп счетной знакопеременной группы, т. е. группы всех четных подстановок счетного множества, перемещающих только конечное число точек. В описании важную роль играет представление силовских p-подгрупп конечных симметрических групп таблицами многочленов, введенное в [3], которое естественным образом обобщается на случай счетных групп подстановок.

Пусть V — векторное пространство размерности k над полем F_p из p элементов; $S(V)$ — симметрическая, а $A(V)$ — знакопеременная группа степени p^k, действующая на множестве V; $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — некоторый фиксированный базис пространства V. Пусть V_i — подпространство V, натянутое на векторы $e_1, e_2, \ldots, e_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_k = V$ — флаг подпространств V_i. Группа всех подстановок из $S(V)$, сохраняющих этот флаг почленно и индуцирующих на каждом факторе V_{i+1}/V_i тождественную подстановку, является силовской p-подгруппой симметрической группы $S(V) = S_{p^k}$. Как показано в [3], эту группу, которую в дальнейшем будем обозначать P_{p^k}, удобно представлять наборами урезанных многочленов вида

$$a = [a_1, a_2(x_1), \ldots, a_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})], \tag{1}$$

где $a_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}) \in F_p[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}]$ — урезанные многочлены — представители минимальной степени класса смежности по модулю идеала $I = (x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, \ldots, x_{i-1}^p - x_{i-1})$. При этом таблице вида (1) соответствует подстановка из $S(V)$, задаваемая правилом $t \to ta = (t_1 + a_1, t_2 + a_2(t_1), \ldots, t_k + a_k(t_1, \ldots, t_{k-1}))$, где $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ — некоторая точка пространства V. Произведением двух таблиц с координатами $a_i(x_1, x_2, \ldots$

$\ldots, x_{i-1})$ и $b_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ соответственно является таблица с координатами

$$a_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}) + b_i(x_1 + a_1,\ x_2 + a_2(x_1), \ldots,\ x_{i-1} + a_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-2})),$$
$$i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (2)$$

В случае $p = 2$ можно рассматривать таблицы, не содержащие на последней координате в качестве слагаемого монома $x_1x_2 \ldots x_{k-1}$. Как показано в [2], совокупность всех таких таблиц образует группу, являющуюся силовской 2-подгруппой знакопеременной группы $A(V) = A_{p^k}$. В дальнейшем эту группу будем обозначать Q_{2^k}.

Зная строение групп P_{p^k} и Q_{2^k} для любого k, можно описать строение силовских 2-подгрупп знакопеременной группы произвольной конечной степени n. Для этого нам понадобится следующее определение.

Определение 1. *Пусть $(\mathfrak{G}_1, M_1), (\mathfrak{G}_2, M_2), \ldots, (\mathfrak{G}_s, M_s), \ldots$ — некоторые группы подстановок на непересекающихся множествах, $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{G}_i$ — их прямая сумма. Подгруппу $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{G}$, состоящую из всех четных подстановок, назовем четной суммой групп подстановок $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_s, \ldots$ и обозначим $\boxplus_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{G}_i, M_i)$ или просто $\boxplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{G}_i$.*

Нетрудно убедиться, что когда число слагаемых в $\mathfrak{H} = \boxplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{G}_i$, содержащих нечетные подстановки, больше 1, то $\mathfrak{H}$ — подпрямое произведение групп $\mathfrak{G}_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь $n \geqslant 4$ — произвольное натуральное число и $n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i$; $a_i = 0, 1$ — разложение n по степеням двойки. Тогда максимальная степень двойки, делящая $n!$, равна $L = a_l(2^{l-1} + 2^{l-2} + \ldots + 2^0) + a_{l-1}(2^{l-2} + 2^{l-3} + \ldots + 2^0) + \ldots + a_1 2^0$. Положим $I = \{i \mid a_i = 1\}$, $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, а $\{M_i\}_{i \in I}$ — разбиение множества M такое, что $|M_i| = 2^i$. Как показано в [2], для любой силовской 2-подгруппы Q_n знакопеременной группы $A_n = A(M)$ существует такое разбиение $\{M_i\}_{i \in I}$, $|M_i| = 2^i$, и силовские 2-подгруппы $P(M_i)$ групп $S(M_i)$, что имеет место равенство $(Q_n, M) = \boxplus_{i \in I} (P(M_i), M_i)$.

Рассмотрим теперь случай счетного множества. Пусть F_p — поле Галуа с отмеченным нулевым элементом, C — регулярно представленная аддитивная группа поля F_p. Для множества $\Lambda = \{0, 1, 2, \ldots\}$ рассмотрим множество V векторов $x = (x_\lambda)$, где $x_\lambda \in F_p$ для любого $\lambda \in \Lambda$ и $x_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$, за исключением конечного числа.

Вектор $x^\mu = (x_\nu)_{\nu \leqslant \mu}$ назовем μ-отрезком, а вектор ${}^\mu x = (x_\nu)_{\nu > \mu}$ — μ-остатком вектора x. На μ-остатках вектора x определим функцию $\chi({}^\mu x)$ со значениями в поле F_p

$$\chi({}^\mu x) = \begin{cases} 1, & \text{если все координаты вектора } {}^\mu x \text{ равны } 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где 1 — единица поля F_p. Легко видеть, что для $\mu < \infty$

$$\chi({}^\mu x) \equiv \chi({}^{\mu+1} x)(1 - x_{\mu+1}^{p-1}). \qquad (3)$$

Число μ назовем основанием функции χ.

Пусть P — совокупность подстановок g множества V таких, что

$$\text{а)} \quad xg = (x_\mu + g_\mu({}^\mu x))_{\mu \in \Lambda}, \quad x \in V, \qquad (4)$$

где $g_\mu({}^\mu x)$ — функция, определенная на μ-остатках, со значениями в C;

б) функции $g_\mu({}^\mu x)\equiv 0$ для всех $\mu\in\Lambda$, кроме конечного числа; в) каждая функция $g_\mu({}^\mu x)\neq 0$ лишь для конечного числа μ-остатков.

Как показано в [1], совокупность подстановок P образует бесконечную p-группу. Из определения группы P видно, что каждый элемент $g\in P$ однозначно определяется заданием функций $g_\mu({}^\mu x)$ для всех $\mu\in\Lambda$, поэтому его можно записать в виде $g=[g_\mu({}^\mu x)]_{\mu\in\Lambda}$.

Из п. б) и в) определения группы P следует, что для элемента $g\in P$ найдется такое конечное число k, что элемент будет переставлять только точки множества V вида $(t_0, t_1, \dots, t_k, 0, 0, \dots)$, $t_i\in F_p$, а все остальные он оставляет на месте, т. е. элемент g будет нетождественно действовать на точках векторного подпространства V, изоморфного пространству V_{k+1} размерности $k+1$ над полем F_p. В силу изложенного выше, подстановке g можно сопоставить набор

$$g=[a_0(x_1, x_2, \dots, x_k)\,\chi({}^k x),\; a_1(x_2, x_3, \dots, x_k)\,\chi({}^k x), \dots,\; a_k\chi({}^k x), 0, 0, \dots], \tag{5}$$

где $a_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k)\in F_p[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k]$ — урезанные многочлены. При этом действие элемента g на точках множества V в таком представлении снова задается правилом (4), где $g_\mu({}^\mu x)=a_\mu(x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \dots, x_k)\,\chi({}^k x)$ при $\mu\leqslant k$ и $g_\mu({}^\mu x)\equiv 0$ при $\mu>k$. В дальнейших рассуждениях очень важную роль играет равенство

$$\begin{gathered}[a_0(x_1, x_2, \dots, x_k)\,\chi({}^k x),\; a_1(x_2, x_3, \dots, x_k)\,\chi({}^k x), \dots,\; a_k\chi({}^k x), 0, 0, \dots]=\\ =[a_0(x_1, x_2, \dots, x_k)(1-x_{k+1}^{p-1})\,\chi({}^{k+1}x),\; a_1(x_2, x_3, \dots, x_k)(1-x_{k+1}^{p-1})\,\chi({}^{k+1}x), \dots\\ \dots,\; a_k(1-x_{k+1}^{p-1})\,\chi({}^{k+1}x), 0, \dots],\end{gathered} \tag{6}$$

которое непосредственно следует из (3).

Пусть $g=[a_0(x_1, x_2, \dots, x_k)\,\chi({}^k x), a_1(x_2, x_3, \dots, x_k)\,x({}^k x), \dots, a_k\chi({}^k x), 0, 0, \dots]$ и $h=[b_0(x_1, x_2, \dots, x_l)\,\chi({}^l x),\; b_1(x_2, x_3, \dots, x_l)\,\chi({}^l x), \dots,\; b_l\chi({}^l x), 0, 0, \dots]$ — произвольные элементы из P. Если $k=l$, то произведением элементов g и h будет элемент, задаваемый таблицей

$$gh=[c_0(x_1, x_2, \dots, x_k)\,\chi({}^k x),\; c_1(x_2, x_3, \dots, x_k)\,\chi({}^k x), \dots,\; c_k\chi({}^k x), 0, 0, \dots], \tag{7}$$

где $c_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k)=a_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k)+b_i(x_{i+1}+a_{i+1}(x_{i+2}, \dots, x_k), x_{i+2}+a_{i+2}(x_{i+3}, \dots, x_k), \dots, x_k+a_k)$, $i=0, 1, \dots, k$.

Если же $k\neq l$, то предварительно необходимо функции χ, присутствующие в табличной записи элементов g и h, по рекуррентному правилу (6) привести к одному (большему) основанию, после чего умножить эти элементы по правилу (7).

Легко проверить, что совокупность всех подстановок вида (5) для фиксированного конечного основания k функции χ образует группу, изоморфную группе P_{p^k} (это видно из (2) и (7)), а равенство (6) определяет естественное вложение изоморфного образа группы P_{p^k} в изоморфный образ группы $P_{p^{k+1}}$.

При $p=2$, по аналогии с конечным случаем, рассмотрим таблицы вида (5), у которых полином $a_0(x_1, x_2, \dots, x_k)$ не содержит в качестве слагаемого монома $x_1x_2, \dots, x_k$. Легко проверить, что совокупность всех таких таблиц образует подгруппу индекса 2 группы P, которую обозначим через Q. При фиксированном конечном основании k функции χ совокупность всех подстановок указанного типа образуют подгруппу группы Q, изоморфную группе Q_{2^k}. Как и в предыдущем случае, имеется естественное вложение изоморфного образа Q_{2^k} в изоморфный образ $Q_{2^{k+1}}$.

Обозначим через $S=S(V)$ счетную симметрическую группу множества V, а через $A=A(V)$ — счетную знакопеременную группу. Так как имеется взаимно-однозначное соответствие между элементами множества V и натуральными числами, то группы S и A без ограничения общности можно рассматривать как счетную симметрическую и счетную знакопеременную группу подстановок произвольного счетного множества.

Теорема 1. *Группа P — силовская p-подгруппа группы S, а при $p \neq 2$ и группы A. Группа Q — силовская 2-подгруппа группы A.*

Доказательство. Группа S — объединение возрастающей последовательности групп $S_p, S_{p^2}, \ldots, S_{p^n}, \ldots$, а группа A — объединение возрастающей последовательности групп $A_p, A_{p^2}, \ldots, A_{p^n}, \ldots$. Как следует из определения и из равенства (6), группы P и Q также являются объединением возрастающих последовательностей групп $P_p, P_{p^2}, \ldots, P_{p^n}, \ldots$ и $Q_2, Q_{2^2}, \ldots, Q_{2^n}, \ldots$ соответственно. В то же время, для любого i группа P_{p^i} — силовская p-подгруппа группы S_{p^i}, а при $p \neq 2$ и силовская p-подгруппа группы A_{p^i}. В свою очередь группа Q_{2^i} — силовская 2-подгруппа группы A_{2^i}. Все это доказывает теорему.

Перейдем к построению всех силовских p-подгрупп счетной знакопеременной группы A, действующей на множестве N натуральных чисел. При $p \neq 2$ каждая силовская p-подгруппа счетной знакопеременной группы является силовской p-подгруппой счетной симметрической группы и наоборот. Их строение дается основной теоремой работы [1].

При $p = 2$ проведем следующее построение. Множество N разбиваем на k_i подмножеств из 2^i символов, $k_i = 0, 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и на не более чем счетное множество Γ подмножеств со счетным числом символов. На каждом подмножестве из 2^i символов строим группы P_{2^i}, а на каждом счетном подмножестве — группу типа P. С точностью до подобия такие группы, очевидно, построить можно. Для некоторого фиксированного разбиения определим множество $I = \{i \mid k_i \neq 0\}$. Имеет место лемма.

Лемма 1. *Группа*

$$\overline{Q} = \boxed{+}_{i \in I} P_{2^i} \boxed{+}_{j \in \Gamma} P^{(j)}, \tag{8}$$

равная четной сумме всех групп P_{2^i}, $i \in I$, и всех групп $P^{(j)} \simeq P$, $j \in \Gamma$, при заданном разбиении является силовской 2-подгруппой счетной знакопеременной группы A, за исключением случая, когда одновременно $|I| = 0$ и $|\Gamma| = 1$.

Доказательство. Действительно, пусть $G_n^{(k)}$ — группа, изоморфная P_{2^n}, причем $G_n^{(k)} \subset P^{(k)}$, $G_n^{(k)} \subset G_n^{(k)}$ при $n < r$, и $\bigcup_{i=0}^{\infty} G_i^{(k)} = P^{(k)}$, где $P^{(k)}$ — группа изоморфная P, действующая на k-м счетном множестве при заданном разбиении множества N. Существование групп $G_n^{(k)}$ следует из построения группы P. Тогда, очевидно, $\overline{Q}$ — объединение возрастающей последовательности групп $H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n$, где $H_n = \boxed{+}_{i=0}^{n} P_{2^i}^{k_i} \boxed{+}_{j=1}^{n+1} G_{n+j}^{(j)}$ и $P_{2^i}^{k_i} = E$, если $k_i = 0$, и $P_{2^i}^{k_i} = P_{2^i}$, если $k_i = 1$.

Группа H_n, $n = 1, 2, \ldots$, действует на множестве M_n мощности

$$m_n = \sum_{i=0}^{n} k_i 2^i + \sum_{i=n+1}^{2n+1} 2^i.$$

Пусть $A_{m_n} = A(M_n)$ — знакопеременная группа подстановок, действующая на множестве M_n. Тогда H_n — силовская 2-подгруппа группы A_{m_n}. Так как $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} Am_i$ и $\overline{Q} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$, то лемма доказана.

Когда разбиение такое, что $|I| = 0$ и $|\Gamma| = 1$, прямая сумма вырождается и силовская 2-подгруппа изоморфна группе Q.

Теорема 2. *Произвольная силовская 2-подгруппа из A изоморфна либо группе вида $\overline{Q}$, либо Q.*

Доказательство. Пусть H — некоторая силовская 2-подгруппа группы A. Ее можно естественным образом вложить в некоторую силовскую 2-подгруппу $\overline{H}$ группы S. Согласно теореме 1 из [1] группа $\overline{H}$ разлагается в прямую сумму $\overline{H} = \bigoplus_{l \in I} P_{2l} \bigoplus_{k \in \Gamma} P^{(k)}$ для некоторого разбиения, задаваемого множествами I и Γ. Если $|I| = 0$ и $|\Gamma| = 1$, то $\overline{H} = P$ и $Q \subset \overline{H}$, поэтому $H = Q$, так как в одной силовской p-подгруппе группы S не могут содержаться две различные силовские p-подгруппы группы A. В других случаях для этого же разбиения рассмотрим группу $\overline{Q} = \boxplus_{l \in I} P_{2l} \boxplus_{k \in \Gamma} P^{(k)}$. Согласно лемме 1 группа $\overline{Q}$ — силовская 2-подгруппа группы A и $\overline{Q} \subset \overline{H}$. Поэтому снова $H = \overline{Q}$. Таким образом, любая силовская 2-подгруппа группы A либо изоморфна Q, либо имеет вид (8).

Теорема 3. *Пусть Q_1 и Q_2 — силовские 2-подгруппы из A, причем $Q_1 = \boxplus_{i \in I} P_{2i} \boxplus_{k \in \Gamma} P^{(k)}$ и $Q_2 = \boxplus_{j \in J} P_{2j} \boxplus_{l \in \Delta} P^{(l)}$. Группы Q_1 и Q_2 изоморфны тогда и только тогда, когда множества I и J совпадают, а множества Γ и Δ — равномощны.*

Эта теорема — простое следствие аналогичной теоремы для силовских 2-подгрупп группы S, доказанной в [1].

1. *Иванюта И. Д.* Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы.— Укр. мат. журн., 1963, 15, № 3, с. 240—249.
2. *Дмитрук Ю. В., Сущанский В. И.* Строение силовских 2-подгрупп знакопеременных групп и нормализаторы силовских подгрупп в симметрических и знакопеременных группах.— Укр. мат. журн., 1971, 33, № 3, с. 304—312.
3. *Kaloujnine L.* La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetrieques finis.— Ann. sci. Ecole norm. super., 1948, 65, p. 239—276.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
15.12.1980 г.