УДК 518:517.948

П. П. Забрейко, П. П. Злепко

Об обобщении метода Ньютона — Канторовича на уравнения с недифференцируемыми операторами

Пусть X и Y — банаховы пространства, а $T(r)$ — шар с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом r. В статье изучаются уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0, \tag{1}$$

где f и g — определенные на шаре $T(R)$ из пространства X и принимающие значения из пространства Y операторы, причем f дифференцируем. Изучается применимость к уравнению (1) двух аналогов [1—4] метода Ньютона—Канторовича:

$$u_{n+1} = u_n - C^{-1}(f(u_n) + g(u_n)),\ n = 0, 1, 2, \dots,\ u_0 = x_0 \tag{2}$$

(здесь C — некоторый действующий из X и Y линейный непрерывный оператор, имеющий обратный, обычно он выбирается равным $f'(x_0)$) и

$$v_{n+1} = v_n - f'(v_n)^{-1}(f(v_n) + g(v_n)),\ n = 0, 1, 2, \dots,\ v_0 = x_0. \tag{3}$$

Первый из них является обобщением на уравнение (1) модифицированного метода Ньютона—Канторовича, второй — основного метода Ньютона—Канторовича. При $g = 0$ оба они переходят в классические варианты. Здесь для анализа методов (2) и (3) применяется подход, основанный на использовании мажорантных уравнений и восходящий к исследованиям Л. В. Канторовича [5]. Изложенные теоремы — обобщение аналогичных утверждений из [6] для классических вариантов метода Ньютона—Канторовича.

1. Рассмотрим сначала вспомогательное скалярное уравнение

$$r = d(r), \tag{4}$$

где

$$d(r) = a + b\left(\int_0^r \omega(\tau)\,d\tau + H(r)\right), \tag{5}$$

a и b — положительны, $\omega(r)$, $H(r)$, $H(r+t) - H(r)$, $t \geqslant 0$, — неотрицательные, монотонно возрастающие и непрерывные функции, обращающиеся при $r = 0$ в нуль.

Пусть уравнение (4) имеет, по крайней мере, одно положительное решение. Обозначим через r_* наименьшее из таких решений. Если оно изолировано и при достаточно близких к r_* и больших чем r_* значениях r выполняется неравенство $d(r) < r$, то через R_* обозначим точную верхнюю границу чисел ξ, для которых $d(r) < r$ при $r \in (r_*, \xi)$; если r_* не является изолированным решением или при достаточно близких к r_* и больших чем r_* значениях r, неравенство $d(r) < r$ неверно, тогда положим $R_* = r_*$.

Последовательные приближения

$$r_{n+1} = d(r_n),\quad n = 0, 1, 2, \dots;\ r_0 = 0 \tag{6}$$

сходятся к r_*, монотонно возрастая, а последовательные приближения

$$R_{n+1} = d(R_n),\ n = 0, 1, 2, \dots;\ R_0, \tag{7}$$

где R_0 — любое число из $[r_*, R_*)$, сходятся к r_*, монотонно убывая.

Аналогично, последовательные приближения

$$\rho_{n+1} = \rho_n - (\rho_n - d(\rho_n))(1 - b\omega(\rho_n))^{-1},\ n = 0, 1, 2, \dots;\quad \rho_0 = 0 \tag{8}$$

сходятся к r_*, монотонно возрастая.

Ниже функция d конструируется по операторам f и g так, чтобы уравнение (1) в случае $r_* \leqslant R$ имело в шаре $T(r_*)$ единственное решение x_*. При этом последовательные приближения (2) и (3) сходятся к x_* и выполнены неравенства

$$\| x_* - u_n \| \leqslant r_* - r_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{9}$$

$$\| x_* - v_n \| \leqslant r_* - \rho_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

характеризующие быстроту сходимости. Число r_* характеризует погрешность, с которой x_0 «приближает» решение x_*.

Если выполнены неравенства $r_* \leqslant R < R_*$, то уравнение (1) не имеет отличных от x_* решений и в шаре $T(R)$.

Наиболее важен случай, когда функции ω и H линейные

$$\omega(R) = cr, \quad H(r) = hr. \tag{11}$$

Тогда уравнение (4) запишем в виде

$$r = a + bhr + 0{,}5bcr^2. \tag{12}$$

Оно имеет положительные решения тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{2abc} \leqslant 1 - bh. \tag{13}$$

Таким образом,

$$r_* = (1 - bh - \sqrt{(1 - bh)^2 - 2abc})\,(bc)^{-1}; \tag{14}$$

$$R_* = (1 - bh + \sqrt{(1 - bh^2 - 2abc})\,(bc)^{-1}. \tag{15}$$

Изучим скорость сходимости последовательностей (6) и (8) в рассматриваемом случае. Очевидно,

$$r_* - r_{n+1} \leqslant q\,(r_* - r_n), \tag{16}$$

где

$$q = 1 - \sqrt{(1 - bh)^2 - 2abc}. \tag{17}$$

Следовательно, последовательность (6) сходится к r_* не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем (17).

Далее, так как

$$r_* - \rho_{n+1} = 0{,}5\,(bc\,(r_* - \rho_n) + 2bh)\,(r_* - \rho_n)\,(1 - bc\rho_n)^{-1}, \tag{18}$$

то $r_* - \rho_{n+1} \leqslant q\,(r_* - \rho_n)$, где q определено формулой (17). Следовательно, последовательность (8) сходится к r_* не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем (17). Фактически сходимость более быстрая. Из (18) и сходимости (8) к r_* вытекает сходимость с быстротой геометрической прогрессии с любым знаменателем, большим

$$q_0 = bh\,(bh + \sqrt{(1 - bh)^2 - 2abc})^{-1}. \tag{19}$$

2. Пусть числа a и b определены равенствами

$$a = \| c^{-1}(f(x_0) + g(x_0)) \|, \quad b = \| c^{-1} \| \tag{20}$$

и выполнены неравенства

$$\| f'(x) - c \| \leqslant \omega(\| x - x_0 \|); \tag{21}$$

$$\| g(x + h) - g(x) \| \leqslant H(\| x - x_0 \| + \| h \|) - H(\| x - x_0 \|). \tag{22}$$

В этой ситуации справедлива такая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство $r_* \leqslant R$ (выполнены неравенства $r_* \leqslant R < R_*$). Тогда уравнение* (1) *имеет в шаре $T(r_*)$ единственное решение x_* (имеет в шаре $T(r_*)$ решение x_*, единственное в шаре $T(R)$). Последовательные приближения* (2) *определены при всех n, лежат в $T(r_*)$, сходятся к этому решению и справедливы неравенства* (9).

Доказательство. Для доказательства существования решения в шаре $T(r_*)$ покажем, что при тех n, при которых последовательные приближения (2) определены, справедливы неравенства

$$\| u_{n+1} - u_n \| \leqslant r_{n+1} - r_n. \tag{23}$$

Тем самым окажется, что эти последовательные приближения определены при всех n. Более того, для них будут выполнены неравенства

$$\| u_m - u_n \| \leqslant | r_m - r_n |, \; m, n = 0, 1, 2, \dots . \tag{24}$$

Отсюда вытекает фундаментальность последовательности (2), а следовательно, ее сходимость к некоторому элементу x_*, который является решением уравнения (1). С другой стороны, переходя в (24) к пределу при $m \to \infty$, получаем (9).

Для $n = 0$ неравенство (23) очевидно: $\| u_1 - x_0 \| = \| f'(x_0)^{-1} (f(x_0) + g(x_0)) \| = a = d(0) = r_1 - r_0$. Допустим, что неравенства (23) имеют место при всех $n < k$ и покажем их справедливость при $n = k$. Действительно,

$$\| u_{k+1} - u_k \| = \| C^{-1} (f(u_k) + g(u_k) - f(u_{k-1}) - g(u_{k-1}) - g(u_{k-1}) - C(u_k - u_{k-1})) \| \leqslant b \left\| \int\limits_0^1 (f'_x((1-t)u_{k-1} + tu_k) - C)(u_k - u_{k-1})\, dt \right\| + b \| g(u_k) - g(u_{k-1}) \| .$$

А так как по предположению индукции

$$\| u_1 - x_0 \| \leqslant r_1, \dots, \| u_k - u_0 \| \leqslant r_k, \; \| u_k - u_{k+1} \| \leqslant r_k - r_{k-}, \text{ то}$$

$$u_{k+1} - u_k \| \leqslant b \int\limits_0^1 \omega((1-t) r_{k-1} + tr_k)(r_k - r_{k-1})\, dt + b(H(r_k) - H(r_{k-1})) =$$

$$= b \left(\int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} \omega(\tau)\, d\tau + H(r_k) - H(r_{k-1}) \right) = d(r_k) - d(r_{k-1}) = r_{k+1} - r_k .$$

Существование решения в шаре $T(r_*)$ доказано. Покажем теперь справедливость утверждений о единственности. При этом ограничимся случаем, когда $r_* \leqslant R \leqslant R_*$.

Пусть x_{**} — некоторое решение уравнения (1) в шаре $T(R)$. Тогда

$$\| x_{**} - u_n \| \leqslant R_n - r_n . \tag{25}$$

Действительно, при $n = 0$ это неравенство очевидно: $\| x_{**} - x_0 \| < R = R_0 - r_0$. Далее, если оно выполнено при $n = k$, то при $n = k + 1$

$$\| x_{**} - u_{k+1} \| = \| C^{-1} (f(x_{**}) + g(x_{**}) - f(u_k) - g(u_k) - C(x_{**} - u_k)) \| \leqslant$$

$$\leqslant b \left\| \int\limits_0^1 (f'_x((1-t) x_{**} + tu_k) - C)(x_{**} - u_k)\, dt \right\| + b \| g(x_{**}) - g(x_k) \|,$$

а так как по предположению индукции $\| x_{**} - u_k \| \leqslant R_k - r_k$, $\| x_{**} - x_0 \| \leqslant R_k$, то

$$\| x_{**} - u_{k+1} \| \leqslant b \int\limits_0^1 \omega((1-t) R_k + tr_k)(R_k - r_k)\, dt + b(H(R_k) - H(r_k)) =$$

$$= b \left(\int\limits_{r_k}^{R_k} \omega(\tau)\, d\tau + H(R_k) - H(r_k) \right) = R_{k+1} - r_{k+1} .$$

Неравенства (25) доказаны. Из них следует сходимость последовательности (2) к x_{**} и тем самым равенство $x_* = x_{**}$. Теорема доказана.

В условиях теоремы 1 условия принципа сжимающих отображений, вообще говоря, не выполнены. Например, если $R \geqslant r_{\text{кр}}$, где $r_{\text{кр}} = \sup\{r : d'(r) < 1\}$, то условия принципа сжимающих отображений не выполнены уже для самого скалярного уравнения (4).

3. Перейдем к последовательным приближениям (3). Пусть числа a и b определены равенствами

$$a = \| f'(x_0)^{-1} (f(x_0) + g(x_0)) \|, \; b = \| f'(x_0)^{-1} \| \tag{26}$$

и выполнены неравенства

$$\|f'(x+h)-f'(x)\|\leqslant \omega(r+\|h\|)-\omega(r),\ \|x-x_0\|\leqslant r,\ r+\|h\|\leqslant R; \quad (27)$$

$$\|g(x+h)-g(x)\|\leqslant H(\|x-x_0\|+\|h\|)-H(\|x-x_0\|). \quad (28)$$

Тогда справедлива такая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнено неравенство $r_*\leqslant R$ (выполнены неравенства $r_*\leqslant R\leqslant \bar{R}$)*. Тогда уравнение* (1) *имеет в шаре $T(r_*)$ единственное решение x_* (имеет в шаре $T(r_*)$ решение x_*, единственное в шаре $T(R)$). Кроме того, последовательные приближения* (3) *определены при всех n, лежат в $T(r_*)$ и сходятся к этому решению, причем справедливы неравенства* (10).

Доказательство. Так как в условиях теоремы 2 выполнены и условия теоремы 1 (неравенство (27) более ограничительно, чем (21)), то нужно доказать лишь утверждения о сходимости последовательных приближений. Для этого установим по индукции справедливость неравенств

$$\|v_{n+1}-v_n\|\leqslant \rho_{n+1}-\rho_n,\quad n=0,1,2,\ldots, \quad (29)$$

где ρ_n — последовательность (8). Утверждения теоремы 2 о последовательных приближениях (3) вытекают из (29) точно так же, как и утверждения теоремы 1 о последовательных приближениях (2) вытекают из соотношений (23).

При $n=0$ неравенство (29) очевидно. Пусть это неравенство верно при всех $n<k$ (в частности, определены элементы $x_0, v_1, \ldots, v_k$). Покажем, что оно верно при $n=k$.

Установим сначала обратимость оператора $f'(x_k)$. Действительно, $\|v_k-x_0\|\leqslant\|v_k-v_{k-1}\|+\|v_{k-1}-v_{k-2}\|+\ldots+\|v_1-v_0\|\leqslant\rho_k-\rho_{k-1}+\rho_{k-1}-\rho_{k-2}+\ldots+\rho_1-\rho_0=\rho_k$. Поэтому $\|f'(x_0)^{-1}(f'(v_k)-f'(x_0))\|\leqslant b\omega(\rho_k)<b\omega(r_*)\leqslant 1$: неравенство $b\omega(r_*)<1$ следует из того, что r_* — наименьший корень уравнения (4). Поэтому оператор $D=I-f'(x_0)^{-1}\times(f'(v_k)-f'(x_0))$ имеет обратный. Так как $f'(v_k)=f'(x_0)D$, то обратный имеет и оператор $f'(v_k)$, причем

$$\|f'(v_k)^{-1}\|\leqslant b(1-b\omega(\rho_k))^{-1}. \quad (30)$$

Далее, $\|v_{k+1}-v_k\|=\|f'(v_k)^{-1}(f(v_k)+g(v_k))\|=\|f'(v_k)^{-1}[f(v_k)-f(v_{k+1})-f'(v_{k-1})(v_k-v_{k-1})+g(v_k)-g(v_{k-1})]\|=\left\|f'(v_k)^{-1}\left[\int_0^1(f'_x((1-t)v_{k-1}+tv_k)-f'(v_{k-1}))(v_k-v_{k-1})\,dt+g(v_k)-g(v_{k-1})\right]\right\|$ и аналогично

$$\rho_{k+1}-\rho_k=b(1-b\omega(\rho_k))^{-1}\left[\int_0^1(\omega((1-t)\rho_{k-1}+t\rho_k)-\omega(\rho_{k-1}))(\rho_k-\rho_{k-1})\,dt+H(\rho_k)-H(\rho_{k-1})\right].$$

По предположению индукции, $\|v_k-v_{k-1}\|\leqslant\rho_k-\rho_{k-1}$ и $\|v_{k-1}-x_0\|\leqslant\rho_{k-1}$, поэтому из (27), (28) и (30) вытекают оценки

$$\|v_{k+1}-v_k\|\leqslant\|f'(v_k)^{-1}\|\int_0^1\|f'((1-t)v_{k-1}+tv_k)-f'(v_{k-1})\|\cdot\|v_k-v_{k-1}\|\,dt+\|f'(v_k)^{-1}\|\cdot\|g(v_k)-g(v_{k-1})\|\leqslant\frac{b}{1-b\omega(\rho_k)}\left[\int_0^1(\omega((1-t)\rho_{k-1}+t\rho_k)-\omega(\rho_{k-1}))(\rho_k-\rho_{k-1})\,dt+H(\rho_k)-H(\rho_{k-1})\right]=\rho_{k+1}-\rho_k.$$

Значит, $\|v_{k+1}-v_k\|\leqslant\rho_{k+1}-\rho_k$.

Таким образом, неравенство (29), а вместе с ним и теорема 2, доказаны.

Теорема 1 применима для более широкого класса уравнений, чем теорема 2. Однако теорема 2 позволяет применить для приближенного построения точного решения уравнения (1) итерационный процесс (3), который сходится к решению быстрее итерационного процесса (2). Выигрыш не столь значителен, как в случае, когда $g = 0$.

Условия (22) и (28), хотя и напоминают условие Липшица, не совпадают с ним. Неравенство

$$\| \Delta (x + h) - \Delta (x) \| \leqslant \delta (r + \| h \|) - \delta (r), \ \| x - x_0 \| < r, \ r + \| h \| \leqslant R, \tag{31}$$

связывающее оператор Δ и скалярную функцию δ, сводится к классическому условию Липшица $\| \Delta x_1 - \Delta x_2 \| \leqslant k \| x_1 - x_2 \|$, $\| x_1 \|$, $\| x_2 \| \leqslant R$ в случае, когда $\delta (r) = kr$. Если Δ — дифференцируем в шаре $T (R)$, то условие (31) равносильно неравенству $\| \Delta' (x) \| \leqslant \delta' (\| x - x_0 \|)$, $x \in T (R)$.

Теоремы 1 и 2 применимы и к уравнениям общего вида $Lx=0$, если оператор L допускает представление в виде суммы дифференцируемого оператора f и оператора g, удовлетворяющего условию Липшица с малой постоянной. Такое представление нужно выбирать из соображений простоты реализации соответствующей схемы (2) или (3). В частности, теоремы 1 и 2 применимы к уравнению вида $x = Ax$ (в этом случае $X = Y$) с действующим в пространстве X оператором A. Если P — некоторый проектор в X ($P = P^2$) на некоторое подпространство X_p, то можно положить $f = I - PA$, $g = (I - P) A$. Формулы (2) и (3) в этом случае дают один из вариантов так называемого проекционно-итеративного метода Ньютона—Канторовича. Его сходимость исследовалась, например, в [3, 7]. Теоремы 1 и 2 позволяют усилить приведенные там результаты.

Теоремы 1 и 2 позволяют оценить зону существования неявных функций, определенных уравнением $L (\lambda, x) = 0$. Некоторые утверждения в этом направлении получены в [8, 9].

1. *Зінченко А. І.* Про деякі методи наближеного розв'язування рівнянь з недиференційовними операторами.— Доп. АН УРСР, 1963, № 2, с. 156—161.
2. *Дабрашова М. І., Зінченко А. І., Ярушевська А. С.* Про модифікацію основного методу Ньютона—Канторовича.— Доп. АН УРСР. Сер. А., 1972, № 8, с. 682—685.
3. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 455 с.
4. *Гречко В. І.* Про оцінку похибки одного узагальнення методу Ньютона—Канторовича.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 8, с. 679—682.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах.— М.: Физматгиз, 1959.— 684 с.
6. *Забрейко П. П.* О приближенном решении операторных уравнений.— В кн.: Дифференцирование функций: высшие производные и вариационное исчисление. Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та, 1980, с. 51—81.
7. *Курпель Н. С., Мигович Ф. М.* О некоторых обобщениях метода Ньютона—Канторовича.— Укр. мат. журн., 1969, 21, № 5, с. 610—625.
8. *Злепко П. П., Мигович Ф. М.* Применение модификации метода Ньютона—Канторовича для приближенного построения неявных функций.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 2, с. 222—226.
9. *Злепко П. П.* О некоторых проекционно-итеративных методах приближенного построения неявной функции.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 2, с. 979—981.

Белорусский государственный университет
Тернопольский финансово-экономический институт

Поступила в редакцию
15.10.1981 г.