УДК 519.21

*Ю. Г. Курицын, Ю. И. Петунин*

# Об одной классификации стационарных случайных процессов

Будем рассматривать вещественный, непрерывный в среднем квадратическом, стационарный случайный процесс $X_t(\omega)$ с неизвестным средним $m$, известной ковариационной функцией $B(\tau)$ и спектральной функцией $F(\lambda)$, не имеющей скачка в нуле. Не ограничивая общности, положим $B(0) = 1$, тогда $F(\lambda)$ будет функцией распределения, симметричной и не имеющей скачка в нуле по условию.

Обозначим через $m_T^*(\omega)$ наилучшую линейную несмещенную оценку среднего, взятую по интервалу наблюдения $[-T, T]$ [1]. Очевидно, дисперсия $\sigma^2(m_T^*(\omega)) = \sigma^2(T)$ этой оценки — невозрастающая функция переменной $T$, определенной на интервале $[0, \infty)$ и стремящейся к нулю при $T \to \infty$. Логически возможны три типа функций $\sigma^2(T)$: 1) $\sigma^2(T) > 0$ для любого $T > 0$; 2) $\sigma^2(T) > 0$ для $T \in [0, T_1)$, $T_1 > 0$, $\sigma^2(T_1) = 0$; 3) $\sigma^2(T) = 0$ для любого $T > 0$.

Процесс $X_t(\omega)$ назовем регулярным относительно среднего, сингулярным относительно среднего, крайне сингулярным относительно среднего, если $\sigma^2(T)$ удовлетворяет соответственно условиям 1)—3). Нетривиальный пример процесса, сингулярного относительно среднего, приведен в [2].

Будем рассматривать достаточные условия крайней сингулярности и регулярности процессов относительно среднего в терминах спектральной функции $F(\lambda)$. Отметим, что регулярность относительно среднего на интервале фиксированной длины $2T$ соответствует эквивалентности гауссовских мер на интервале $[-T, T]$, порожденных процессами, имеющими одинаковую ковариационную функцию $B(\tau)$ и различные средние на данном интервале (см. [3], гл. III, § 4, п. 1.

Исследуем крайнюю сингулярность относительно среднего.

Теорема 1. *Наилучшая линейная несмещенная оценка среднего имеет вид*

$$m_T^*(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n} c_k X_0^{(2k)}(\omega) = R_{2n}\left(\frac{d}{dt}\right) X_t(\omega)\,|_{t=0}, \tag{1}$$

*где* $X_0^{(2k)}(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *значения производных в среднем квадратическом процесса* $X_t(\omega)$ *в точке* $t = 0$, *если и только если спектральная функция* $F(\lambda)$ *процесса имеет конечное число точек роста.*

Доказательство. Достаточность. По условию $F(\lambda) = \sum_{\lambda_k < \lambda} \sigma_k$. Следовательно, ковариационная функция $B(t - s)$ имеет вид

$$B(t-s) = \sum_{k=-n}^{n} \sigma_k e^{i\lambda_k(t-s)}, \; -\lambda_{-k} = \lambda_k, \; \sigma_k = \sigma_{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим полином

$$R_{2n}(i\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(i\lambda)^2}{\lambda_k^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k (i\lambda)^{2k}, \quad c_0 = 1, \tag{2}$$

и воспользуемся стандартной изометрией между гильбертовым пространством случайных величин $L^2(X_t(\omega))$, натянутым на значения случайного процесса $X_t(\omega)$, $t \in R^1$, и пространством $L^2(dF)$ комплекснозначных функций $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in R^1$, интегрируемых в квадрате, относительно меры на прямой, порожденной функцией распределения $F(\lambda)$. Тогда, очевидно, полиному (2) соответствует величина

$$R_{2n}\left(\frac{d}{dt}\right) X_t(\omega)\,|_{t=0} = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{n} c_k X_0^{(2k)}(\omega). \tag{3}$$

Легко заметить, что случайная величина (3) — линейная, несмещенная оценка среднего. Более того, ее дисперсия равна нулю, т. е. случайная величина (3) является наилучшей линейной несмещенной оценкой для интервала наблюдения, имеющего сколь угодно малую длину.

Необходимость. Пусть существует наилучшая линейная несмещенная оценка вида (3), имеющая нулевую дисперсию, тогда можно построить полином вида (1), причем

$$\| R_{2n}(i\lambda) \|^2_{L^2(dF)} = \sigma^2\left(R_{2n}\left(\frac{d}{dt}\right) X_t(\omega)\,|_{t=0}\right) = 0.$$

Это означает, что $R_{2n}(i\lambda) = 0 \pmod F$. Следовательно, нули многочлена $R_{2n}(i\lambda)$ накрывают множество точек роста функции $F(\lambda)$. Теорема доказана.

Перейдем к случаю, когда спектральная функция $F(\lambda)$ имеет бесконечное число точек роста. Для этого рассмотрим линейное многообразие

$$L_{2n} = \left\{ m(\omega);\, m(\omega) = \sum_{k=0}^{n} c_k X_0^{(2k)}(\omega), \quad c_0 = 1 \right\}.$$

Оно состоит из оценок среднего вида (1). Очевидно, что задача нахождения оценки $m^*_{2n}(\omega)$, имеющей минимальную дисперсию в множестве $L_{2n}$, эквивалентна задаче нахождения многочлена $R^*_{2n}(i\lambda)$, наименее уклоняющегося от нуля в смысле нормы,

$$\| R^*_{2n}(i\lambda) \|^2_{L^2(dF)} = \int_{-\infty}^{\infty} | R_{2n}(i\lambda) |^2\, dF(\lambda)$$

с дополнительным условием $R^*_{2n}(0) = 1$. Эта задача хорошо изучена в классической теории моментов [4]. Теорема 2.5.1 из [5] дает явное представление многочлена $R^*_{2n}(i\lambda)$ через ортогональные полиномы, ассоциированные со спектральной функцией $F(\lambda)$.

$$R^*_{2n}(i\lambda) = \sum_{k=0}^{2n} P_k(0)\, \overline{P_k(\lambda)} \Big/ \sum_{k=0}^{2n} | P_k(0) |^2, \tag{4}$$

где $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированные полиномы относительно меры, порожденной спектральной функцией $F(\lambda)$ на прямой. Многочлен (4) — четная функция. Поэтому его можно рассматривать как многочлен, зависящий от $(i\lambda)^2$. Используя теорему 3.2.2 из [5], можно упростить выражение (4): $R^*_{2n}(i\lambda) = \gamma_{2n}\lambda^{-1}[P_{2n+1}(\lambda) P_{2n}(0) - P_{2n}(\lambda) P_{2n+1}(0)]$, где $\gamma_{2n}$ — нормирующий множитель.

Ортогональные полиномы нечетной степени — нечетные функции. Поэтому $P_{2n+1}(0) = 0$. Окончательно имеем

$$R^*_{2n}(i\lambda) = \tilde{\gamma}_{2n}\lambda^{-1} P_{2n+1}(\lambda), \tag{5}$$

где $\tilde{\gamma}_{2n}$ — нормирующий множитель.

Используя представление (5), рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$F'(\lambda) = \begin{cases} 0{,}5, & \lambda \in (-1, 1), \\ 0, & \lambda \overline{\in} (-1, 1). \end{cases}$$

В этом случае многочлены $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ называются многочленами Лежандра.

Используя их явное представление (5), нетрудно найти многочлен $R^*_{2n}(i\lambda)$, наименее уклоняющийся от нуля,

$$R^*_{2n}(i\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(2n-k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2n-2k+2)} (2\lambda)^{2(n-k)}.$$

Соответствующая оценка $m^*_{2n}(\omega)$ имеет вид

$$m^*_{2n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(2k+2)} 2^{2k} X_0^{(2k)}(\omega).$$

Пример 2. $F'(\lambda) = \pi^{-1/2} e^{-\lambda^2}$, $\lambda \in R^1$. В этом случае $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ — многочлены Чебышева — Эрмита. Как и в предыдущем примере, используя явное представление многочленов Чебышева — Эрмита [5], можно записать явное выражение многочлена

$$R^*_{2n}(i\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!\,(2\lambda)^{2(n-k)}}{k!\,(2n-2k+1)!}.$$

Следовательно, соответствующие оценки имеют вид

$$m^*_{2n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k n!}{(n-k)!\,(2k+1)!} X_0^{(2k)}(\omega).$$

Теорема 2. *Пусть $X_t(\omega)$, $t \in R^1$, — вещественный, бесконечно дифференцируемый в среднем квадратическом, стационарный процесс, спектральная функция которого не имеет скачка в нуле и является единственным решением проблемы моментов Гамбургера, тогда процесс $X_t(\omega)$ крайне сингулярен относительно среднего.*

Доказательство. Рассмотрим линейные многообразия оценок $L_{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$, и соответствующие линейные несмещенные оценки $m^*_{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$, введенные выше. Дисперсии оценок $m^*_{2n} = \left[\sum_{k=0}^{2n} |P_k(0)|^2\right]^{-1}$. Последовательность этих дисперсий монотонно убывает, поэтому достаточно ограничиться рассмотрением ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(0)|^2$. Согласно теореме 2.5.3 из [4] максимальная масса, которая может быть сосредоточена в нуле в распределении масс по оси, отвечающем решению проблемы моментов Гамбургера, равна $\left|\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(0)|^2\right]^{-1}$. Но в условиях теоремы спектральная функция $F(\lambda)$ — единственное решение проблемы моментов. Кроме того, у функции $F(\lambda)$ отсутствует скачок в нуле, поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(0)|^2$ расходится. Следовательно, последовательность линейных несмещенных оценок $\{m^*_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ имеет дисперсии, стремящиеся к нулю. Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно проверить, что процессы в примерах 1 и 2 являются крайне сингулярными относительно среднего.

Класс процессов, регулярных относительно среднего, достаточно богат. Он содержит, например, процессы с выпуклой на $[0, \infty)$ ковариационной функцией $B(\tau)$, $B(\infty) < 1$ см. [6], некоторые процессы с рациональными спектральными плотностями (см. [1], гл. 5, п. 4). Ниже мы приведем пример процесса, регулярного относительно среднего.

Рассмотрим процесс $X_t(\omega) = m + \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(t-s)\,d\xi(s)$, где $a(t)$ — функция с носителем, сосредоточенным на интервале $(-A, A)$ и интегрируемая с квадратом, $\zeta(s)$ — стандартный белый шум.

Обозначим через

$$M = \left\{ m_f(\omega);\ m_f(\omega) = \int\limits_{-T}^{T} X_t(\omega) f(t)\,dt, \quad f(t) \in L^2(-T, T),\ \int\limits_{-T}^{T} f(t)\,dt = 1 \right\}$$

совокупность линейных несмещенных оценок среднего, которая, очевидно, плотна в множестве всех линейных несмещенных оценок. Нетрудно найти интегральное представление произвольной оценки $m_f(\omega)$ из М

$$m_f(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)\,d\xi(s), \quad g(s) = \int\limits_{-T}^{T} a(t-s) f(t)\,dt.$$

Функция $g(s)$ имеет носитель, сосредоточенный на интервале $(-T-A, T+A)$, поэтому пользуясь неравенством Буняковского—Шварца, легко оценить снизу дисперсию оценки

$$\sigma^2(m_f(\omega)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^2 ds = \int\limits_{-T-A}^{T+A} |g(s)|^2 ds \geqslant \frac{1}{2(T+A)} \left[ \int\limits_{-T-A}^{T+A} g(s)\,ds \right]^2 =$$

$$= \frac{[\tilde{g}(0)]^2}{2(T+A)} = \frac{[(\tilde{a}(0)\tilde{f}(0)]^2}{2(T+A)} = \frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(s)\,ds\right]^2}{2(T+A)},$$

где $\tilde{a}(\lambda)$, $\tilde{f}(\lambda)$, $\tilde{g}(\lambda)$ — преобразования Фурье соответствующих функций. Этим доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть процесс $X_t(\omega)$ — сумма константы и реакции фильтра на подчиненный процессу белый шум с импульсной переходной функцией $a(t)$, имеющей носитель, сосредоточенный на конечном интервале, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(t)\,dt \neq 0$, тогда процесс регулярен относительно среднего.*


1. *Гренандер У.* Случайные процессы и статистические выводы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 167 с.
2. *Курицын Ю. Г.* О дисперсии наилучшей линейной несмещенной оценки среднего случайного процесса.— Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та, 1972, вып. 3, с. 20—22.
3. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы.— М.: Физматгиз, 1970.— 384 с.
4. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов.— М.: Физматгиз, 1961.— 310 с.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962.— 500 с.
6. *Гаек Я.* Линейная оценка средней стационарного случайного процесса с выпуклой корреляционной функцией.— Чехосл. мат. журн., 1966, 6, с. 94—117.



Воронежский государственный университет
Киевский государственный университет



Поступила в редакцию 13.06.1980 г.