УДК 513.88

О. В. Лопотко, И. И. Рудинский

Интегральное представление четно положительно определенных ограниченных функций бесконечного числа переменных

В данной заметке на основании методики, развитой в [1—2], доказана теорема об интегральном представлении четно положительно определенных ограниченных функций счетного числа переменных из $L_2(\mathbf{R}^\infty, d\omega_{1/2}(x))$. Доказан аналог известной теоремы Минлоса—Сазонова [3, 4] для четно положительно определенных непрерывных на гильбертовом пространстве l_2 ограниченных функций. Устанавливается взаимосвязь полученных результатов.

Мы будем следовать схеме работы [1], где подобные вопросы изучены для положительно определенных функций. Рассмотрим бесконечное произведение $\mathbf{R}^\infty = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \dots$ с элементами $x = (x_j)_{j=1}^\infty$, $x_j \in \mathbf{R}^1$, в $\mathbf{R}^\infty$ гауссовские меры $d\omega_1(x) = (p(x_1)\,dx_1) \otimes (p(x_2)\,dx_2) \otimes \dots$, где $p(t) = \pi^{-1/2} e^{-t^2} dt$, $t \in \mathbf{R}^1$, и $d\omega_{1/2}(x) = (p_0(x_1)\,dx_1) \otimes (p_0(x_2)\,dx_2) \otimes \dots$, где $p_0(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \times e^{-t^2/2} dt$, $t \in \mathbf{R}^1$, $l_{1,+} = \left\{\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty \,|_{\lambda_j \geqslant 0}, \sum_{j=1}^\infty \lambda_j < \infty\right\}$, $l_{2,+} = \left\{\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty \,| \, \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2 < \infty\right\}$.

Определение 1. *Комплекснозначную функцию $k(x)$, $x \in \mathbf{R}^\infty$, четную по каждой переменной, измеримую относительно меры $d\omega_{1/2}(x)$ будем называть четно положительно определенной, если для любой четной по каждой переменной цилиндрической функции $u(x) = u_c(x_1, \dots, x_m)$, где $u_c \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ — класс бесконечно дифференцируемых финитных функций, выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbf{R}^\infty} \int_{\mathbf{R}^\infty} \frac{k(y+x) + k(y-x)}{2} u(y) \overline{u(x)}\, d\omega_1(x)\, d\omega_1(y) \geqslant 0.$$

Теорема 1. *Для того чтобы функция $k(x)$, $x \in \mathbf{R}^\infty$, допускала представление*

$$k(x) = \int_{l_{2,+}} \prod_{j=1}^\infty \cos \lambda_j x_j d\rho(\lambda), \tag{1}$$

где $d\rho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера на σ-оболочке цилиндрических множеств из $l_{2,+}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $k(x)$ была четно положительно определенной и ограниченной. Равенство (1) понимается почти для всех $x \in \mathbf{R}^\infty$ относительно меры $d\omega_{1/2}(x)$. Мера $d\rho(\lambda)$ по $k(x)$ определяется однозначно.

Доказательство. Достаточность. Построим по $k(x)$ гильбертово пространство H_k. На совокупности $C_c^\infty(\mathbf{R}^\infty)$ цилиндрических функций $u(x) = u_c(x_1, \dots, x_m)$ таких, что $u_c \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$, определим дифференциальную операцию, полагая

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^\infty) \ni u(x) \to \frac{1}{p(x_j)} \left(- \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p(x_j) u \right)(x) \in C_c^\infty(\mathbf{R}^\infty), \quad j = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Обозначим через $D = \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^1) \,|\, u, (pu)''/p \in L_2(\mathbf{R}^1, pdt)\}$. Как и в [1], доказывается, что замыкание сужений на $D \otimes D \otimes \dots \subset L_2(\mathbf{R}^\infty, d\omega_1(x))$ операций (2) в H_k есть система самосопряженных коммутирующих операторов A_j, $j = 1, 2, \dots$.

Лемма 1. *Если функция* $k(x)$, $x \in R^{\infty}$, *ограничена, то каждый из операторов* A_j *неотрицателен в* H_k.

Доказательство леммы следует из интегрального представления для ограниченного четно положительно определенного ядра в конечномерном случае

$$K_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \int\limits_{R_+^n} \prod_{j=1}^{n} \cos \sqrt{\lambda_j}\, x_j \cos \sqrt{\lambda_j}\, y_j d\sigma_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

$$R_+^n = \underbrace{R_+^1 \times R_+^1 \times \ldots \times R_+^1}_{n \text{ раз}}, \quad R_+^1 = [0, \infty).$$

Исходя из леммы 1, интегральное представление для ядра $K(x, y) = 0{,}5(k(y+x) + k(y-x))$, $x, y \in R^{\infty}$, можно записать в виде

$$K(x, y) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{R_+^{\infty}} \exp\left(0{,}5 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) \prod_{j=1}^{n} \cos \sqrt{\lambda_j}\, x_j \cos \sqrt{\lambda_j}\, y_j \, d\sigma(\lambda), \qquad (3)$$

где $R_+^{\infty} = R_+^1 \times R_+^1 \times \ldots$.

Лемма 2. *Мера* $d\sigma(\lambda)$ *в* (3) *сосредоточена на* $l_{1,+}$.

Доказательство леммы основывается на неравенстве

$$\int\limits_{R_+^{\infty}} \exp\left(\frac{h-1}{2h} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\right) d\sigma(\lambda) \leqslant b < \infty,$$

$h > 1$ фиксированно, $m = 1, 2, \ldots$.

Необходимость в теореме 1 проверяется непосредственно. Единственность определения меры в (1) вытекает из условий теоремы 3.9 гл. VIII из [5].

Определение 2. *Функцию* $k(x) = k(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, *непрерывную на действительном гильбертовом пространстве* l_2, *четную по каждой переменной, будем называть четно положительно определенной, если*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{k(x^{(i)} + x^{(j)}) + k(x^{(i)} - x^{(j)})}{2} \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0$$

для любого набора точек $x^{(i)} \in l_2$ *и для любого набора комплексных чисел* ξ_i, $i = 1, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывная на* l_2 *четно положительно определенная ограниченная функция* $k(x)$, $x \in l_2$, *допускала представление*

$$k(x) = \int\limits_{l_{2,+}} \prod_{j=1}^{\infty} \cos \lambda_j x_j d\rho(\lambda), \qquad (4)$$

где $d\rho(\lambda)$ — *неотрицательная конечная мера на* σ-*оболочке цилиндрических множеств из* $l_{2,+}$, *необходима и достаточна ее непрерывность в* J-*топологии. Мера* $d\rho(\lambda)$ *по* $k(x)$ *определяется однозначно.*

Доказательство. Необходимость теоремы 2 доказывается с помощью теоремы из [4] и перехода в представлении (4) к мере на R_+^{∞}.

Достаточность основывается на следующей лемме.

Лемма 3. *Непрерывная четно положительно определенная ограниченная функция* $k_n(x)$, $x \in R^n$, *допускает представление*

$$k_n(x) = \int\limits_{R_+^n} \prod_{j=1}^{n} \cos \lambda_j x_j d\rho_n(\lambda_1, \ldots \lambda_n),$$

где $d\rho_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — *неотрицательная конечная мера, которая по* $k_n(x)$ *определяется однозначно.*

Доказательство леммы 3 подобно доказательству леммы 1 в теореме 1.

Заметим, что теорема 2 может быть получена из теоремы 1 по схеме статьи [1].

1. *Березанский Ю. М., Гали И. М.* Положительно определенные функции бесконечного числа переменных в слое.— Укр. мат. журн., 1972, 24, № 4, с. 435—464.
2. *Нгуен Фу Хи.* О представлении экспоненциально выпуклых функций бесконечного числа переменных.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 6, с. 830—837.
3. *Минлос Р. А.* Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1959, 8, с. 497—518.
4. *Сазонов В. В.* Замечание о характеристических функционалах.— Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, вып. 2, с. 201—205.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 800 с.

Львовский лесотехнический институт
Братская средняя школа
Николаевской области

Поступила в редакцию 27.05.1980 г.
после переработки — 10.09.1981 г.