УДК 517.946

Т. Е. Мельник

Задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка

В данной статье дается общий подход к изучению задач с неизвестными подвижными границами для гиперболических систем первого порядка в случае двух независимых переменных. Изучение базируется на методе характеристик, очень хорошо проявившем себя в случае классических граничных задач для гиперболических уравнений и систем [1—5].

1. Постановка задачи. Пусть G — криволинейный четырехугольник в плоскости xOt, ограниченный линиями $t=0$, $t=T>0$, $x=a(t)$, $x=b(t)$, $a(0)=a$, $b(0)=b$, $a(t)<b(t)$, для всех $t\in[0,T]$. В G рассмотрим гиперболическую систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_j,\quad i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где коэффициенты λ_i действительны в каждой точке $(x,t)\in G$ и перенумерованы так, что $\lambda_n(x,t)\leqslant\lambda_{n-1}(x,t)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_1(x,t)$.

Пусть некоторая неизвестная гладкая кривая L, заданная уравнением $x=\psi(t)$, $\psi(0)=\alpha$, $a(t)<\psi(t)<b(t)$ для всех $t\in[0,T]$, разбивает G на две компоненты G^- и G^+. Предполагаем, что коэффициенты системы (1) непрерывны всюду в $\overline{G}$, за исключением точек линии L, при переходе через которую они имеют разрывы первого рода. Для обозначения значений соответствующих разрывных функций в G^- и G^+ будем употреблять сверху индексы «—» и «+». Предположим, что коэффициенты λ_i непрерывно дифференцируемы в $\overline{G}^-$ и $\overline{G}^+$ по обеим переменным, а коэффициенты a_{ij} — по переменной x.

Пусть для всех $t\in[0,T]$ первые p^- среди величин $\lambda_i^-(a(t),t)-a'(t)$ положительны, остальные—отрицательны; первые q^- среди величин $\lambda_i^-(\psi(t),t)-\psi'(t)$ положительны, остальные—отрицательны; первые p^+ среди величин $\lambda_i^+(\psi(t),t)-\psi'(t)$ положительны, остальные—отрицательны и первые q^+ среди величин $\lambda_i^+(b(t),t)-b'(t)$ положительны, остальные—отрицательны $(0\leqslant p^\pm\leqslant n;\ 0\leqslant q^\pm\leqslant n)$.

Требуется найти такое решение $u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)$ системы (1) в $G^- \cup G^+$ и функцию ψ на $[0, T]$, чтобы удовлетворялись начальные условия

$$u_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \tag{2}$$

граничные условия на боковых сторонах G

$$\begin{gathered} u_i^-(a(t), t) = \sum_{j=p^-+1}^{n} \alpha_{ij}^-(t)\, u_j^-(a(t), t) + h_i^-(t), \quad i = 1, \dots, p^-, \\ u_i^+(b(t), t) = \sum_{j=1}^{q^+} \alpha_{ij}^+(t)\, u_j^+(b(t), t) + h_i^+(t), \quad i = q^+ + 1, \dots, n; \end{gathered} \tag{3}$$

условия сопряжения на линии L

$$\begin{gathered} u_i^-(\psi(t), t) = \sum_{j=1}^{q^-} \beta_{ij}^-(\psi(t), t)\, u_j^-(\psi(t), t) + \\ + \sum_{j=p^++1}^{n} \beta_{ij}^+(\psi(t), t)\, u_j^+(\psi(t), t) + H_i^-(\psi(t), t), \quad i = q^- + 1, \dots, n, \\ u_i^+(\psi(t), t) = \sum_{j=1}^{q^-} \gamma_{ij}^-(\psi(t), t)\, u_j^-(\psi(t), t) + \\ + \sum_{j=p^++1}^{n} \gamma_{ij}^+(\psi(t), t)\, u_j^+(\psi(t), t) + H_i^+(\psi(t), t), \quad i = 1, \dots, p^+; \end{gathered} \tag{4}$$

дополнительное условие на L

$$\begin{gathered} \psi'(t) = \sum_{i=1}^{q^-} \delta_i^-(\psi(t), t)\, u_i^-(\psi(t), t) + \\ + \sum_{i=p^++1}^{n} \delta_i^+(\psi(t), t)\, u_i^+(\psi(t), t) + H(\psi(t), t) \end{gathered} \tag{5}$$

и условие

$$\lambda_{q^-+1}^-(\psi(t), t) < \psi'(t) < \lambda_{p^+}^+(\psi(t), t) \tag{6}$$

для всех $t \in [0, T]$.

Предполагается, что: а) функции $\alpha_{ij}^{\pm}$, $h_i^{\pm}$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$; б) функции $\beta_{ij}^{\pm}$, $\gamma_{ij}^{\pm}$, $H_i^{\pm}$, $\delta_i^{\pm}$, H непрерывны по обеим переменным и непрерывно дифференцируемы на

$$G' = [\min_{0 \leqslant t \leqslant T} a(t), \quad \max_{0 \leqslant t \leqslant T} b(t)] \times [0, T].$$

Примечания: а) случай неоднородной системы и ненулевых начальных условий сразу приводится к виду (1), (2) очевидной заменой искомых функций; б) без ограничения общности можно считать $\lambda_{q^-+1}^-(x, t) \equiv -1$, $\lambda_{p^+}^+(x, t) \equiv 1$. В противном случае этого можно добиться (по крайней мере локально) заменой независимых переменных $\tau = 0{,}5\,[\varphi_{q^-+1}^-(x, t) - \varphi_{p^+}^+(x, t)]$, $\xi = 0{,}5\,[\varphi_{q^-+1}^-(x, t) + \varphi_{p^+}^+(x, t)]$, где $\varphi_{q^-+1}^-(x, t) = 0$ и $\varphi_{p^+}^+(x, t) = 0$ — уравнения характеристик системы (1) с номерами $q^- + 1$ и p^+ соответственно, исходящих из точки $(\alpha, 0)$ и входящих в G. Таким образом, условие (6) запишем в виде

$$|\psi'(t)| < 1 \text{ для всех } t \in [0, T] \tag{7}$$

Предполагаются выполненными естественные условия согласования нулевого и первого порядков начальных условий (2), граничных условий (3) и условий сопряжения (4) в угловых точках $(a, 0)$, $(\alpha, 0)$ и $(b, 0)$. В частности, из (2) и (7) с необходимостью следует существование такого $t_0 > 0$, что $|H(\psi(t), t)| < 1$ для всех $t \in [0, t_0]$.

Для любой точки $(\xi, \tau) \in \overline{G}$ решение характеристического уравнения $dx/dt = \lambda_i^{\pm}(x, t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(\tau) = \xi$, запишем в виде $x = \varphi_i^{\pm}(t, \xi, \tau)$, $i = 1, \ldots, n$. Число T предполагается, как обычно, настолько малым, чтобы характеристики $x = \varphi_1^-(t, a, 0)$ и $x = \varphi_n^-(t, \alpha, 0)$ нигде не встречались в G^-, а характеристики $x = \varphi_1^+(t, \alpha, 0)$ и $x = \varphi_n^+(t, b, 0)$ не встречались в G^+.

2. Существование и единственность решения. Пользуясь методом, изложенным в работе [5], заключаем, что задача (1)—(3) имеет единственное классическое решение в областях $\{(x, t) \in G^- : 0 < t \leqslant T, a(t) < x < \varphi_n^-(t, \alpha, 0)\}$ и $\{(x, t) \in G^+ : 0 < t \leqslant T, \varphi_1^+(t, \alpha, 0) < x < b(t)\}$ (условия (4), (5) и (7) на решение в указанных областях влияния не оказывают).

Если же $(\xi, \tau) \in G_{q+1}^- = \{(\xi, \tau) \in G^- : 0 < \tau \leqslant T, \varphi_{q+1}^-(\tau, \alpha, 0) \leqslant \xi \leqslant \varphi_q^-(t, \alpha, 0)\}$ при $q = q^-, \ldots, n-1$ (если $q = q^-$, то $\varphi_{q^-+1}^-(t, \alpha, 0)$ заменяется на $\psi(\tau)$), то с учетом условий (2) интегрирование вдоль характеристик приводит к равенствам

$$u_j^-(\xi, \tau) = \int_0^\tau \sum_{r=1}^n a_{jr}^-(\varphi_j^-(t, \xi, \tau), t)\, u_r^-(\varphi_j^-(t, \xi, \tau), t)\, dt, \quad j = 1, \ldots, q; \tag{8}$$

$$u_j^-(\xi, \tau) = u_j^-(\psi(t_j^-(\xi, \tau)), t_j^-(\xi, \tau)) + \int_{t_j^-(\xi,\tau)}^{\tau} \sum_{r=1}^n a_{jr}^-(\varphi_j^-(t, \xi, \tau), t) \times$$
$$\times u_r^-(\varphi_j^-(t, \xi, \tau), t)\, dt, \quad j = q+1, \ldots, n, \tag{9}$$

где $t_j^-(\xi, \tau)$ — ордината точки пересечения характеристики $x = \varphi_j^-(t, \xi, \tau)$ с кривой $x = \psi(t)$, т. е. t — корень уравнения $\varphi_j^-(t, \xi, \tau) = \psi(t)$. В силу сделанных выше предположений этот корень однозначно определяется для каждой точки (ξ, τ) и является непрерывно дифференцируемой функцией переменных ξ и τ.

Аналогично, для $(\xi, \tau) \in G_p^+ = \{(\xi, \tau) \in G^+ : 0 < \tau \leqslant T, \varphi_{p+1}^+(\tau, \alpha, 0) \leqslant \leqslant \xi \leqslant \varphi_p^+(\tau, \alpha, 0)\}$ при $p = 1, \ldots, p^+$ (если $p = p^+$, то $\varphi_{p^++1}^+(\tau, \alpha, 0)$ заменяется на $\psi(\tau)$), получим равенства

$$u_j^+(\xi, \tau) = u_j^+(\psi(t_j^+(\xi, \tau)), t_j^+(\xi, \tau)) +$$
$$+ \int_{t_j^+(\xi,\tau)}^{\tau} \sum_{r=1}^n a_{jr}^+(\varphi_j^+(t, \xi, \tau), t)\, u_r^+(\varphi_j^+(t, \xi, \tau), t)\, dt, \quad j = 1, \ldots, p; \tag{10}$$

$$u_j^+(\xi, \tau) = \int_0^\tau \sum_{r=1}^n a_{jr}^+(\varphi_j^+(t, \xi, \tau), t)\, u_r^+(\varphi_j^+(t, \xi, \tau), t)\, dt, \quad j = p+1, \ldots, n, \tag{11}$$

где $t_j^+(\xi, \tau)$ — корень уравнения $\varphi_j^+(t, \xi, \tau) = \psi(t)$.

Учитывая условия (4), равенства (8) и (11), уравнения (9) и (10) приводим к виду

$$u_j^-(\xi, \tau) = H_j^-(\psi(t_j^-(\xi, \tau)), t_j^-(\xi, \tau)) + \sum_{m=1}^{q^-} \beta_{jm}^-(\psi(t_j^-), t_j^-) \times$$
$$\times \int_0^{t_j^-} \sum_{r=1}^n a_{mr}^-(\varphi_m^-(t, \psi(t_j^-), t_j^-), t)\, u_r^-(\varphi_m^-(t, \psi(t_j^-), t_j^-), t)\, dt +$$

$$+\sum_{m=p^{+}+1}^{n}\beta_{jm}^{-}(\psi(t_j^{-}),t_j^{-})\int_{0}^{t_j^{-}}\sum_{r=1}^{n}a_{mr}^{+}(\varphi_m^{+}(t,\psi(t_j^{-}),t_j^{-}),t)\,u_r^{+}(\varphi_m^{+}(t,\psi(t_j^{-}),t_j^{-}),t)\times$$

$$\times dt+\int_{t_j^{-}}^{\tau}\sum_{r=1}^{n}a_{jr}^{-}(\varphi_j^{-}(t,\xi,\tau),t)\,u_r^{-}(\varphi_j^{-}(t,\xi,\tau),t)\,dt,\ (\xi,\tau)\in G_{q+1}^{-},\ j=q+1,\ldots,n; \tag{12}$$

$$u_j^{+}(\xi,\tau)=H_j^{+}(\psi(t_j^{+}(\xi,\tau)),t_j^{+}(\xi,\tau))+\sum_{m=1}^{q^{-}}\gamma_{jm}^{-}(\psi(t_j^{+}),t_j^{+})\times$$

$$\times\int_{0}^{t_j^{+}}\sum_{r=1}^{n}a_{mr}^{-}(\varphi_m^{-}(t,\psi(t_j^{+}),t_j^{+}),t)\,u_r^{-}(\varphi_m^{-}(t,\psi(t_j^{+}),t_j^{+}),t)\,dt+$$

$$+\sum_{m=p^{+}+1}^{n}\gamma_{jm}^{+}(\psi(t_j^{+}),t_j^{+})\int_{0}^{t_j^{+}}\sum_{r=1}^{n}a_{mr}^{+}(\varphi_m^{+}(t,\psi(t_j^{+})\,t_j^{+}),t)\,u_r^{+}(\varphi_m^{+}(t,\psi(t_j^{+}),t_j^{+}),t)\times$$

$$\times dt+\int_{t_j^{+}}^{\tau}\sum_{r=1}^{n}a_{jr}^{+}(\varphi_j^{+}(t,\xi,\tau),t)\,u_r^{+}(\varphi_j^{+}(t,\xi,\tau),t)\,dt,(\xi,\tau)\in G_p^{+},\quad j=1,\ldots,p. \tag{13}$$

Таким образом, для каждой заданной непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$ функции ψ, удовлетворяющей условию (7), задача нахождения функций $u_1^{\pm}(x, t), \ldots, u_n^{\pm}(x, t)$ как решения задачи (1)—(4) приводится к решению линейной системы интегральных уравнений Вольтерра (8), (11)—(13), которая легко разрешима методом итераций. Учитывая выполнение условий согласования нулевого и первого порядков, приходим к существованию и единственности (при каждой заданной функции ψ) классического в $G^{-}\cup G^{+}$ решения задачи (1)—(4). Остается лишь из всего множества допустимых функций ψ выбрать ту, для которой выполняются условия (5) и (7).

Для полного решения поставленной задачи получим некоторые следствия из системы уравнений (8), (11)—(13), считая функцию ψ известной. Введем обозначения

$$A^{\pm}=\max_{i,j}\sup_{(x,t)}|a_{ij}^{\pm}(x,t)|,\quad H^{\pm}=\max_{i}\sup_{(x,t)}|H_i^{\pm}(x,t),\ \beta^{\pm}=\max_{i,j}\sup_{(x,t)}|\beta_{ij}^{\pm}(x,t)|,$$

$$\gamma^{\pm}=\max_{i,j}\sup_{(x,t)}|\gamma_{ij}^{\pm}(x,t)|,\quad A=\max\{A^{-}(2+q^{-}\beta^{-}+q^{-}\gamma^{-}),\ A^{+}(n-p^{+})\times$$

$$\times(\beta^{+}+\gamma^{+})\},\quad H=\sup_{(x,t)}|H(x,t)|,\quad \delta^{\pm}=\max_{i}\sup_{(x,t)}|\delta_i^{\pm}(x,t)|,\ \delta=$$

$$=\max\{q^{-}\delta^{-},\quad (n-p^{+})\,\delta^{+}\}.$$

Полагая, что в рассматриваемой системе интегральных уравнений $(\xi,\tau)\in L$, учитывая соотношения $t_j^{\pm}(\xi,\tau)|_L\equiv\tau$, $0\leqslant t_j^{\pm}(\xi,\tau)\leqslant\tau$ для всех j и производя очевидные оценки, получаем

$$\sup_{t}\sum_{i=1}^{n}|u_i(\psi(t),t)|\leqslant(H^{-}+H^{+})\,e^{AT}.$$

Тогда из условия (5) следует, что $|\psi'(t)|\leqslant H+\delta(H^{-}+H^{+})\,e^{AT}$. Таким образом, если решение задачи существует, то для выполнения неравенства (7) достаточно выполнения условий

$$\frac{1-H}{\delta(H^{-}+H^{+})}>1,\quad T<\frac{1}{A}\ln\frac{1-H}{\delta(H^{-}+H^{+})}=t_1. \tag{14}$$

Считаем, что эти условия выполнены с самого начала. Остается доказать существование и единственность решения. Подставляя (8) и (11) в (5) и интегрируя по t от 0 до τ, получаем уравнение вида

$$\psi(\tau) = \alpha + \int_0^\tau \Phi(t, \psi(t), u)\, dt. \tag{15}$$

Как уже отмечалось выше, для каждой фиксированной функции ψ нахождение функций $u_i^{\pm}(x, t)$ сводится к решению линейной системы интегральных уравнений Вольтерра, однозначно разрешимой по методу последовательных приближений. Запишем полученное решение символически в виде $u(x, t) = U(x, t, \psi(t))$. В силу сделанных в п. 1 предположений полученное решение, очевидно, непрерывно и непрерывно дифференцируемо по совокупности всех переменных. Тогда в силу (15) для нахождения функции ψ приходим к уравнению

$$\psi(\tau) = \alpha + \int_0^\tau \Phi(t, \psi(t), U(\psi(t), t, \psi(t)))\, dt,$$

где $\Phi(t, y, z)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по y и z для $0 \leqslant t \leqslant T$, $a(t) \leqslant y \leqslant b(t)$, $-\infty < z < \infty$. После этого обычным путем доказываем существование такого $t_2 > 0$, что последнее уравнение имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение на $[0, t_2]$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены все предположения, сформулированные в п. 1, то существует такое* $\overline{t} = \min\{t_0, t_1, t_2\}$, *что задача (1) — (5), (7) имеет единственное классическое решение, определенное для всех* $t \in [0, \overline{t}[$.

1. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости.— Учен. зап. Латв. ун-та, 1958, 20, вып. 3, с. 87—104.
2. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1968.— 688 с.
3. *Мельник З. О.* Общие смешанные задачи для общих двумерных гиперболических систем.— Дифференц. уравнения, 1966, 11, № 7, с. 958—966.
4. *Мельник З. О.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении в составной области.— Сиб. мат. журн., 1966, 7, № 3, с. 577—590.
5. *Мельник З. О., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для двумерной гиперболической системы первого порядка с разрывными коэффициентами.— Мат. сб., 1965, 68 : 4, с. 632—638.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
06.07.1980 г.