АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 34, № 4. 1982

Научный журнал, основан в 1949 г. выходит один раз в два месяца

Киев Наукова думка

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко

Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций

Пусть $L^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$, — пространство суммируемых на (a, b) в p-й степени функций $x(t)$ с нормой

$$\| x \|_p = \left(\int_a^b | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p};$$

$L^\infty(a, b)$ — пространство измеримых существенно ограниченных на (a, b) функций $x(t)$ с нормой

$$\| x \|_\infty = \operatorname*{supvrai}_{a \leqslant t < b} | x(t) |.$$

Зададим числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и определим на $L^p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, функционал

$$\| x \|_{p;(\alpha,\beta)} = \| \alpha x_+ + \beta x_- \|_p = \left(\int_a^b | x(t) [\alpha \operatorname{sign} x_+(t) + \beta \operatorname{sign} x_-(t)] |^p dt \right)^{1/p}, \quad (1)$$

где $x_\pm(t) = \max(\pm x(t), 0)$. Очевидно, что $\| x \|_{p;(\alpha,\beta)} = 0$ тогда и только тогда, когда для почти всех $t \in (a, b)$ $x(t) = 0$. Очевидно также, что для любой функции $x \in L^p(a, b)$

$$\min(\alpha, \beta) \| x \|_p \leqslant \| x \|_{p;(\alpha,\beta)} \leqslant \max(\alpha, \beta) \| x \|_p. \quad (2)$$

В силу справедливого для всех $t \in (a, b)$ неравенства $|(x + y)_\pm(t)| \leqslant \leqslant | x_\pm(t) + y_\pm(t) |$ функционал $\| x \|_{p;(\alpha,\beta)}$ полуаддитивен,

$$\| x + y \|_{p;(\alpha,\beta)} \leqslant \| x \|_{p;(\alpha,\beta)} + \| y \|_{p;(\alpha,\beta)}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) легко следует непрерывность функционала $\| x \|_{p;(\alpha,\beta)}$.

Отметим, что (3) — аналог неравенства Минковского. Следующая теорема дает аналог неравенства Гельдера.

Теорема 1. *Если* $x \in L^p(a, b)$, $y \in L^q(a, b)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *то*

$$\int_a^b x(t) \, y(t) \, dt \leqslant \| x \|_{p;(\alpha,\beta)} \| y \|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})}. \quad (4)$$

Для доказательства (4) понадобится такая лемма.

Лемма 1. *Для любых $x,\ y \in L^1(a, b)$*

$$\int_a^b x(t)\,[\alpha \operatorname{sign} y_+(t) - \beta \operatorname{sign} y_-(t)]\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b x(t)\,[\alpha \operatorname{sign} x_+(t) - \beta \operatorname{sign} x_-(t)]\,dt. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $A = \{t \in (a, b) : x(t) \neq 0\}$, $A_1 = \{t \in A:\ \operatorname{sign} y(t) = \operatorname{sign} x(t)\}$, $A_2 = \{t \in A : \operatorname{sign} y(t) = -\operatorname{sign} x(t)\}$. Ясно, что

$$\int_a^b x(t)\,[\alpha \operatorname{sign} y_+(t) - \beta \operatorname{sign} y_-(t)]\,dt =$$
$$= \int_{A_1 \cap A} x(t)\,[\alpha \operatorname{sign} x_+(t) - \beta \operatorname{sign} x_-(t)]\,dt +$$
$$+ \int_{A_2 \cap A} x(t)\,[\alpha \operatorname{sign} x_-(t) - \beta \operatorname{sign} x_+(t)]\,dt.$$

Поскольку первый из полученных интегралов не превосходит правой части (5), а второй $\leqslant 0$, лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x \in L^p(a, b)$, $y \in L^q(a, b)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда в силу (5) и неравенства Гельдера

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,[\alpha \operatorname{sign} x_+(t) - \beta \operatorname{sign} x_-(t)] \times$$
$$\times\, y(t)\,[\alpha^{-1} \operatorname{sign} x_+(t) - \beta^{-1} \operatorname{sign} x_-(t)]\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b x(t)\,[\alpha \operatorname{sign} x_+(t) - \beta \operatorname{sign} x_-(t)] \times$$
$$\times\, y(t)\,[\alpha^{-1} \operatorname{sign} y_+(t) - \beta^{-1} \operatorname{sign} y_-(t)]\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^p\,[\alpha^p \operatorname{sign} x_+(t) + \beta^p \operatorname{sign} x_-(t)]\,dt\Big)^{1/p} \times$$
$$\times \Big(\int_a^b |y(t)|^q\,[\alpha^{-q} \operatorname{sign} y_+(t) + \beta^{-q} \operatorname{sign} y_-(t)]\,dt\Big)^{1/q}$$

и неравенство (4) доказано.

Положим

$$y(t) = \frac{|x(t)|^{p-1}\,[\alpha^p \operatorname{sign} x_+(t) - \beta^p \operatorname{sign} x_-(t)]}{\|x(t)\,[\alpha \operatorname{sign} x_+(t) - \beta \operatorname{sign} x_-(t)]\|_p^{p-1}}.$$

Так как $\|y\|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1$ и $\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt = \|x\|_{p;(\alpha,\beta)}$, устанавливаем, что

$$\sup_{\|y\|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1} \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt = \|x\|_{p;(\alpha,\beta)},\quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{6}$$

Несимметричные приближения. Пусть H — конечномерное подпространство пространства $L^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$; $x \in L^p(a, b)$; α и β — положительные числа. Положим

$$E(x, H)_{p;(\alpha,\beta)} = \inf_{u \in H} \|x - u\|_{p;(\alpha,\beta)}. \tag{7}$$

Величину (7) назовем наилучшим (α, β)-приближением функции $x(t)$ элементами из H в метрике $L^p(a, b)$, а элемент $u_0 \in H$, доставляющий inf в правой части (7),—элементом наилучшего (α, β)-приближения в $L^p(a, b)$ подпространством H для функции $x(t)$. Используя стандартные рассуждения (см., напр., [1, с. 20, 21]), легко доказать, что для любой $x \in L^p(a, b)$ в конечномерном подпространстве H элемент наилучшего (α, β)-приближения существует.

Для $x \in L^p(a, b)$ обозначим через $H_x^{\pm}$ множество $\{u \in H: \pm u(t) \leqslant \pm x(t)$ для почти всех $t \in (a, b)\}$ и положим для $1 \leqslant p < \infty$

$$E^{\pm}(x, H)_p = \begin{cases} \infty, & H_x^{\pm} = \varnothing, \\ \inf\limits_{u \in H_x^{\pm}} \| x - u \|_p, & H_x^{\pm} \neq \varnothing. \end{cases}$$

$E^{\pm}(x, H)_p$ называется наилучшим приближением снизу (+) и сверху (—) функции x элементами из H в метрике $L^p(a, b)$.

Очевидно, что $E(x, H)_{p;(1,1)}$ — наилучшее приближение функции x элементами из H в метрике $L^p(a, b)$.

Теорема 2. *Для любой $x \in L^p(a, b)$ и для любого конечномерного подпространства H пространства $L^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$,*

$$\lim_{\beta \to \infty} E(x, H)_{p;(1,\beta)} = E^{+}(x, H)_p, \tag{8}$$

и

$$\lim_{\alpha \to \infty} E(x, H)_{p;(\alpha,1)} = E^{-}(x, H)_p. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем (8). Справедливость (9) устанавливается аналогично.

Как функция от β $E(x, H)_{p;(1,\beta)}$ не убывает с ростом β, и для любого $\beta \geqslant 1$

$$E(x, H)_{p;(1,\beta)} \leqslant E^{+}(x, H)_p. \tag{10}$$

Поэтому предел в левой части (8) существует и не превосходит $E^{+}(x, H)_p$. Чтобы доказать, что этот предел не меньше $E^{+}(x, H)_p$, предположим сначала, что $H_x^{+} \neq \varnothing$. Для каждого $\beta \geqslant 1$ обозначим через u_β элемент из H такой, что

$$\| x - u_\beta \|_{p;(1,\beta)} = \| (x - u_\beta)_{+} + \beta (x - u_\beta)_{-} \|_p = E(x, H)_{p;(1,\beta)}.$$

Тогда, очевидно,

$$\| x - u_\beta \|_p \leqslant E(x, H)_{p;(1,\beta)} \leqslant E^{+}(x, H)_p.$$

Следовательно, множество $\{u_\beta\}_{\beta \geqslant 1} \subset H$ ограничено. Ввиду конечномерности H это множество содержит последовательность $\{u_{\beta_n}\}$, сходящуюся при $\beta_n \to \infty$ в $L^p(a, b)$ к некоторому элементу $u_\infty \subset H$.

Предположим, что для некоторого множества $A \subset (a, b)$ положительной меры $u_\infty(t) > x(t)$, если $t \in A$. Так как при $\beta_n \to \infty$

$$\int_A (x(t) - u_{\beta_n}(t))\, dt \to \int_A (x(t) - u_\infty(t))\, dt = \Delta < 0,$$

то для всякого достаточно большого β_n найдется множество $A_{\beta_n} \subset A$, имеющее положительную меру, такое, что для $t \in A_{\beta_n}$ $u_{\beta n}(t) > x(t)$ и

$$\int_{A_{\beta_n}} | x(t) - u_{\beta_n}(t) |\, dt > | \Delta |/2.$$

Но тогда для таких β_n

$$\| x - u_{\beta_n} \|_{p;(1,\beta_n)} \geqslant \beta_n \Big(\int\limits_{A_{\beta_n}} | x(t) - u_{\beta_n}(t) |^p \, dt \Big)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\beta_n}{(\operatorname{mes} A_{\beta_n})^{1/q}} \int\limits_{A_{\beta_n}} | x(t) - u_{\beta_n}(t) | \, dt > \frac{\beta_n |\Delta|}{2(b-a)^{1/q}}, \; p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Так что при $\beta \to \infty$ $\| x - u_{\beta_n} \|_{p;(1,\beta_n)} \to \infty$, что невозможно.

Таким образом, $u_\infty(t) \leqslant x(t)$ для почти всех $t \in (a,b)$. Когда $H_x^+ = \varnothing$, в предположении

$$\lim_{\beta \to \infty} E(x, H)_{p;(1,\beta)} < \infty,$$

с помощью аналогичных рассуждений можно легко прийти к противоречию.

Продолжим рассуждения в случае $H_x^+ \neq \varnothing$. Отметим, что функционал в $L^p(a, b)$, который задается формулой

$$F(y) = \int\limits_a^b y(t) \frac{| x(t) - u_\infty(t) |^{p-1}}{\| x - u_\infty \|_p^{p-1}} \, dt,$$

непрерывен. Поэтому и в силу неравенства (4)

$$E^+(x, H)_p \leqslant \int\limits_a^b (x(t) - u_\infty(t)) \frac{| x(t) - u_\infty(t) |^{p-1}}{\| x - u_\infty \|_p^{p-1}} \, dt =$$

$$= \lim_{\beta_n \to \infty} \int\limits_a^b (x(t) - u_{\beta_n}(t)) \frac{| x(t) - u_\infty(t) |^{p-1}}{\| x - u_\infty \|_p^{p-1}} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\beta_n \to \infty} \| x - u_{\beta_n} \|_{p;(1,\beta_n)} \left\| \frac{| x(\cdot) - u_\infty(\cdot) |^{p-1}}{\| x - u_\infty \|_p^{p-1}} \right\|_{q;(1,\beta_n^{-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\beta_n \to \infty} \| x - u_{\beta_n} \|_{p;(1,\beta_n)} = \lim_{\beta_n \to \infty} E(x, H)_{p;(1,\beta_n)}.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Приведем еще одно утверждение о связи (α, β) - приближений с односторонними приближениями.

Теорема 3. *Если компактное множество $\mathfrak{M}$ и подпространство H в $L^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$, таковы, что функционал $E^\pm(x, H)_p$ непрерывен на $\mathfrak{M}$, то*

$$\lim_{\beta \to \infty} \sup_{x \in \mathfrak{M}} E(x, H)_{p;(1,\beta)} = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E^+(x, H)_p$$

и

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sup_{x \in \mathfrak{M}} E(x, H)_{p;(\alpha,1)} = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E^-(x, H)_p.$$

Доказательство. Легко видеть, что функционал $E(x, H)_{p;(1,\beta)}$ при любом β непрерывен на $\mathfrak{M}$. Так что мы имеем монотонно возрастающее с ростом β семейство непрерывных на $\mathfrak{M}$ функций, сходящееся в каждой точке $x \in \mathfrak{M}$ к непрерывной функции $E^+(x, H)_p$. Тогда, как известно, $E(x, H)_{p;(1,\beta)}$ при $\beta \to \infty$ равномерно по $x \in \mathfrak{M}$ сходится к $E^+(x, H)_p$, откуда и следует утверждение теоремы.

Установленные выше свойства функционала $\| x \|_{p;(\alpha,\beta)}$ позволяют распространить критерии элемента наилучшего приближения в L^p на (α, β)-приближения. Для этого надо с очевидными изменениями повторить известное доказательство критерия элемента обычного наилучшего приближения в L^p.

Теорема 4. *Какими бы ни были конечное* $p \geqslant 1$ *и конечные* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *для того, чтобы элемент* $u_0 \in H$ *(H — конечномерное подпространство в* $L^p(a, b)$*) был элементом наилучшего* (α, β)*-приближения для* x *в метрике* $L^p(a, b)$, *достаточно и* ⟨*при* $p = 1$ *в случае, если разность* $x - u_0$ *почти всюду отлична от нуля*⟩ *необходимо, чтобы для любого* $u \in H$ *имело место равенство*

$$\int_a^b u(t)\,|x(t) - u_0(t)|^{p-1} [\alpha^p \operatorname{sign}(x(t) - u_0(t))_+ - \\ - \beta^p \operatorname{sign}(x(t) - u_0(t))_-]\,dt = 0.$$

Из теоремы (4) выведем соотношения двойственности для (α, β)-приближений, аналогичные теореме С. М. Никольского (см. [1, с. 41, 42]). Когда один из параметров α, β стремится к ∞, эти соотношения превращаются в известные соотношения двойственности для односторонних приближений (см., напр., соотношение (10) из [2]).

Теорема 5. *Для любой функции* $x \in L^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и для любого конечномерного подпространства* $H \subset L^p(a, b)$

$$E(x, H)_{p;(\alpha,\beta)} = \sup_{\substack{y \perp H \\ \left\{\|y\|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1\right\}}} \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{11}$$

Доказательство. Ввиду неравенства (4)

$$\sup_{\substack{y \perp H \\ \left\{\|y\|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1\right\}}} \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = \inf_{u \in H} \sup_{\substack{y \perp H \\ \left\{\|y\|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1\right\}}} \int_a^b [x(t) - u(t)]\, y(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{u \in H} \sup_{\|y\|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1} \int_a^b [x(t) - u(t)]\, y(t)\, dt = E(x, H)_{p;(\alpha,\beta)}.$$

С другой стороны, если u_0 — элемент (α, β)-приближения для x (при $p=1$ в случае, когда разность $x-u_0$ отлична от нуля почти всюду) ввиду теоремы 4 функция

$$\bar{y}(t) = \frac{|x(t) - u_0(t)|^{p-1} [\alpha^p \operatorname{sign}(x(t) - u_0(t))_+ - \beta^p \operatorname{sign}(x(t) - u_0(t))_-]}{\| |x(\cdot) - u_0(\cdot)| [\alpha \operatorname{sign}(x(\cdot) - u_0(\cdot))_+ - \beta \operatorname{sign}(x(\cdot) - u_0(\cdot))_- \|_p^{p-1}} \tag{12}$$

обладает свойствами: $\bar{y} \perp H$, $\|\bar{y}\|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1$. Так что

$$\sup_{\substack{y \perp H \\ \left\{\|y\|_{q;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1\right\}}} \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \geqslant \int_a^b (x(t) - u_0(t))\, \bar{y}(t)\, dt = E(x, H)_{p;(\alpha,\beta)}.$$

Если $p = 1$ и $x(t)$ на множестве положительной меры совпадает с $u_0(t)$, то для доказательства (11) нам понадобится лемма.

Лемма 2. *Для любого конечномерного подпространства* H *пространства* $L^1(a, b)$ *в* $L^1(a, b)$ *найдется функция* $x(t)$, *отличная от любого элемента из* H *на множестве меры* $b - a$.

Доказательство леммы. Мы докажем, что среди функций $\{\sin \lambda t\}_{\lambda > 0}$ найдется функция, обладающая требуемым свойством. Предположим, что для каждого $\lambda > 0$ существует элемент u_λ из H такой, что $\{t \in (a, b) : \sin \lambda t = u_\lambda(t)\}$ имеет положительную меру. Обозначим $A_\lambda = \{t \in (a, b) : \sin \lambda t = u_\lambda(t)\}$. Пусть размерность H равна n. Если $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

$\ldots<\lambda_{n+1}$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} A_{\lambda_k}$ имеет меру нуль, так как в противном случае функции $\sin\lambda_1 t$, $\sin\lambda_2 t, \ldots, \sin\lambda_{n+1}t$ были бы линейно зависимыми.

Рассмотрим последовательность интервалов $((b-a)/m, (b-a)/(m-1))$, $m=2, 3, \ldots$. Очевидно, найдется m_0 такое, что в интервале $((b-a)/m_0$, $(b-a)/(m_0-1))$ будет содержаться последовательность чисел $\{\operatorname{mes} A_{\lambda_n}\}$, $n=1, 2, \ldots$ (причем λ_n будут попарно-различными).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_{\lambda_n}}(t),$$

где χ_A — характеристическая функция множества A. Сумма этого ряда принимает в точке $t\in(a, b)$ значение $\geqslant n+1$, если существует $n+1$ множество $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_{n+1}}$, содержащее точку t. Множество B точек t, обладающих таким свойством, содержится, очевидно, в объединении всевозможных множеств типа $A_{\lambda_{i_1}} \cap \ldots \cap A_{\lambda_{i_{n+1}}}$. Множество таких пересечений счетно, и каждое из них имеет меру нуль. Значит, мера B равна нулю.

Таким образом, почти всюду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_{\lambda_n}}(t) \leqslant n \quad \text{и} \quad \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_{\lambda_n}}(t) \leqslant n\,(b-a).$$

Вместе с тем по теореме Лебега

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_{\lambda_n}}(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \chi_{A_{\lambda_n}}(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} A_{\lambda_n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-a}{m_0} = \infty.$$

Полученное противоречие говорит о том, что среди функций $\{\sin\lambda t\}_{\lambda>0}$ есть такие, которые от каждого элемента из H отличаются на множестве полной меры.

Продолжим доказательство теоремы. Из леммы 2 следует, что для любой функции $x\in L^1(a, b)$ найдется последовательность $x_n(t)$, сходящаяся в $L^1(a, b)$ к $x(t)$ и такая, что при любом n $x_n(t)$ отличается от любого элемента из H на множестве меры $b-a$. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять функцию $v(t)$, которая отлична на множестве меры $b-a$ от любой функции вида $cx+u$, $c\in\mathbf{R}^1$, $u\in H$, и рассмотреть последовательность $x_n(t)=x(t)+n^{-1}v(t)$.

По доказанному выше для любого $n=1, 2, \ldots$

$$E(x_n, H)_{1;(\alpha,\beta)} = \sup_{\substack{y\perp H \\ \{\|y\|_{\infty;(\alpha^{-1},\beta^{-1})}\leqslant 1\}}} \int_a^b x_n(t)\,y(t)\,dt.$$

Переходя в обеих частях последнего равенства к пределу при $n\to\infty$, зазавершаем доказательство теоремы 5.

Приведенные в данном пункте утверждения показывают, в частности, что несимметричные (α, β)-приближения — это «мостик» между обычными наилучшими L^p-приближениями и наилучшим односторонними L^p-приближениями.

Несимметричные приближения классов периодических функций. В данном пункте L^p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ — пространства 2π-периодических функций с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p$. Пусть F_{2n-1}^T — линейное пространство тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n-1$, а W_p^r, $r=1, 2, \ldots$; $1\leqslant p\leqslant\infty$, — класс 2π-периодических функций $x(t)$ таких, что $x^{(r-1)}(t)$, $x^{(0)}=x$, — локально абсолютно непрерывна, а $\|x^{(r)}\|_p\leqslant 1$. Для данных положительных чисел α и β введем в рассмотрение $2\pi n^{-1}$-периодическую четную функцию, которая на $[0, \pi/n]$ определяется так:

$$\varphi_{n;(\alpha,\beta)}(t) = \begin{cases}\alpha, & 0 \leqslant t \leqslant \beta\pi/[(\alpha+\beta)n], \\ -\beta, & \beta\pi/[(\alpha+\beta)n] < t \leqslant \pi/n,\end{cases}$$

и через $\varphi_{n,r;(\alpha,\beta)}$ обозначим r-й периодический интеграл от $\varphi_{n;(\alpha,\beta)}$ с нулевым средним значением на периоде.

Для того чтобы проиллюстрировать возможность вычисления наилучших (α, β)-приближений классов периодических функций конкретными подпространствами, мы отметим, что справедлива теорема.

Теорема 6. *Для* $r = 1, 3, \ldots$; $1 < p \leqslant \infty$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $n = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{x \in W_p^r} E(x, F_{2n-1}^T)_{1;(\alpha,\beta)} = \|\varphi_{n,r;(\alpha,\beta)}\|_q, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Замечание. Теорема 6, устанавливающая «мостик» между результатами [3] и [2] с учетом некоторых известных результатов, которые будут сформулированы ниже, может быть доказана по схеме [3], см. также [1, с. 120—125]). Используя схемы из работ [2, 4], основанные на результатах и методах Н. П. Корнейчука (см., напр., [1]), можно рассмотреть также случай четных r в теореме 6, случай классов $W^r H^\omega$ (r — четное), приближение сплайнами.

Приведем схему доказательства теоремы 6. Ввиду теоремы 5 и теоремы двойственности С. М. Никольского (см. [1, с. 41, 42])

$$\sup_{x \in W_p^r} E(x, F_{2n-1}^T)_{1;(\alpha,\beta)} = \sup_{x \in W_p^r} \sup_{\left\{\substack{y \perp F_{2n-1}^T \\ \|y\|_{\infty;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1}\right\}} \int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt =$$

$$= \sup_{\left\{\substack{y^{(r)} \perp F_{2n-1}^T \\ \|y\|_{\infty;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1}\right\}} \sup_{\left\{\substack{x \perp F_1^T \\ \|x\|_p \leqslant 1}\right\}} \int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt = \sup_{\left\{\substack{y^{(r)} \perp F_{2n-1}^T \\ \|y^{(r)}\|_{\infty;(\alpha^{-1},\beta^{-1})} \leqslant 1}\right\}} E(y, F_1^T)_{q;(1,1)}. \tag{14}$$

В работе [5] доказано, в частности, что если функция $y(t)$ такова, что $y^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, почти всюду $-\beta \leqslant y^{(r)}(t) \leqslant \alpha$ и $y \perp F_{2n-1}^T$, то

$$\min_t \varphi_{n,r;(\alpha,\beta)}(t) \leqslant y(t) \leqslant \max_t \varphi_{n,r;(\alpha,\beta)}(t). \tag{15}$$

Справедлива также следующая лемма, которая является частным случаем доказанного в [6] варианта теоремы сравнения А. Н. Колмогорова (этот частный случай очень легко установить непосредственно).

Лемма 3. *Пусть 2π-периодическая функция $x(t)$ имеет локально абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и почти всюду $x^{(r)}(t) \leqslant \alpha$ и $x^{(r)}(t) \geqslant -\beta$ и пусть при всех $t \in \mathbf{R}^1$*

$$\min_t \varphi_{n,r;(\alpha,\beta)}(t) \leqslant x(t) \leqslant \max_t \varphi_{n,r;(\alpha,\beta)}(t).$$

Если для $a \in \mathbf{R}^1$ точка $b \in \mathbf{R}^1$ такова, что $x(a) = \varphi_{n,r;(\alpha,\beta)}(b)$ и $x'(a)\varphi'_{n,r;(\alpha,\beta)}(b) \geqslant 0$, то $|x'(a)| \leqslant |\varphi'_{n,r;(\alpha,\beta)}(b)|$.

Учитывая (14), (15), лемму 3 и повторяя с очевидными изменениями рассуждения из [3] (см. также [1, с. 120—125]), легко завершить доказательство теоремы.

В заключение отметим, что из (14) и (15) следует справедливость теоремы (6) при $p = 1$. Соответствующие результаты для наилучших и наилучших односторонних приближений имеются в работах [1, 7].

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 320 с.
2. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* Верхние грани наилучших односторонних приближений классов $W^r L_\psi$ в метрике L.—Мат. заметки, 1977, **22**, № 2, с. 257—268.
3. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов периодических функций.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1967, **88**, с. 61—70.
4. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* О наилучшем одностороннем приближении классов $H^r H^\omega$.—Мат. заметки, 1977, **21**, №3, с. 313—327.
5. *Hörmander L.* A new proof and a generalization of an inequatity of Bohr.— Math. Scand., 1954, **2**, p. 33—45.
6. *Габушин В. Н., Дмитриев Н. П.* О теоремах сравнения. — Вычисл. системы, 1979, № 71, с. 55—62.
7. *Ganelius T.* Über einseiting Approximation durh trigonometriche Polynome.—Math. Scand., 1956, **4**, S. 247—258.

Днепропетровский
государственный университет

Поступила в редакцию
05.03.1981 г.