УДК 517.95

В. П. Бурлаченко, Ю. И. Романенко

О приближении по аппроксимационному методу решения задачи Коши с постоянными коэффициентами

Следуя методу, изложенному в работе [1], рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения гиперболического типа с постоянными коэффициентами и построим алгебраический многочлен $z_n(x, y)$ от двух переменных, приближающий решение $z(x, y)$ задачи Коши. Кроме того, оценим погрешность этого приближения. При этом, как и в [1—4], для получения оценки погрешности приближения используем лемму Гронуолла—Беллмана и ее обобщение.

Рассмотрим на некотором прямоугольнике $\Pi = [-h, h] \times [-\sigma, \sigma]$, $h > 0$, $\sigma > 0$, задачу Коши

$$z_{xy} = az + bz_x + dz_y + f_m(x, y); \tag{1}$$

$$z\,|_{y=kx} = 0, \quad z_x\,|_{y=kx} = 0, \quad z_y\,|_{y=kx} = 0, \tag{2}$$

где a, b, d, k— постоянные; $f_m(x, y)$ — алгебраический многочлен от переменных x и y, сумма показателей которых не превышает m.

Задача (1), (2), как легко показать, эквивалентна интегральному уравнению

$$z(x, y) = a\int\limits_{y/k}^{x} dt \int\limits_{kt}^{y} z(t, s)\,ds + d\int\limits_{y/k}^{x} z(t, y)\,dt + b\int\limits_{kx}^{y} z(x, s)\,ds + \int\limits_{y/k}^{x} dt \int\limits_{kt}^{y} f_m(t, s)\,ds. \tag{3}$$

Будем искать многочлены $Z_n(x, y)$ степени $n \geqslant m$, которые хорошо приближают решение $z(x, y)$ интегрального уравнения (3). Для этого рассмотрим операторное уравнение вида

$$S_n^{h\sigma}\{z_n(x, y)\} = S_n^{h\sigma}\Big\{\Big[a\int\limits_{\eta/k}^{\xi} dt \int\limits_{kt}^{\eta} z_n(t, s)\,ds + d\int\limits_{\eta/k}^{\xi} z_n(t, \eta)\,dt +$$

$$+ b\int\limits_{k\xi}^{\eta} z_n(\xi, s)\,ds + f_{m+2}(\xi, \eta)\Big];\ x, y\Big\}, \tag{4}$$

где

$$S_n^{h\sigma}(f; t, s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} A_{ij} T_i\left(\frac{t}{h}\right) T_j\left(\frac{s}{\sigma}\right)$$

— частная сумма двойного ряда Фурье—Чебышева.

В силу этого равенства у многочленов $z_n(x, y)$ и

$$a\int\limits_{y/k}^{x} dt \int\limits_{kt}^{y} z_n(t, s)\,ds + d\int\limits_{y/k}^{x} z_n(t, y)\,dt + b\int\limits_{kx}^{y} z_n(x, s)\,ds + f_{m+2}(x, y)$$

при разложении их в ряды Фурье—Чебышева совпадают все их коэффициенты A_{ij}, если $i + j \leqslant n$. Поэтому, если уравнение (4) имеет решение, должно иметь решение и уравнение

$$z_n(x, y) = a\int\limits_{y/k}^{x} dt \int\limits_{kt}^{y} z_n(t, s)\, ds + d\int\limits_{y/k}^{x} z_n(t, y)\, dt + b\int\limits_{kx}^{y} z_n(x, s)\, ds +$$

$$+ f_{m+2}(x, y) - \xi_n(x, y), \tag{5}$$

где

$$\varepsilon_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n+2} \tau_{n+2-k,k} T_{n+2-k}\left(\frac{x}{h}\right) T_k\left(\frac{y}{\sigma}\right) + \sum_{k=0}^{n+1} \tau_{n+1-k,k} T_{n+1-k}\left(\frac{x}{h}\right) T_k\left(\frac{y}{\sigma}\right), \tag{6}$$

$\tau_{n+2-k,k}$, $\tau_{n+1-k,k}$ — некоторые неизвестные числа, подлежащие определению.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *При любом фиксированном натуральном $n \geqslant m$ и достаточно малых $h > 0$, $\sigma > 0$ существует единственная система чисел $\tau_{n+2-k,k}$, $k = \overline{0, n+2}$, $\tau_{n+1-k,k}$, $k = \overline{0, n+1}$, при которой решением уравнения* (5) *является некоторый алгебраический многочлен вида*

$$z_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{ij} x^i y^j. \tag{7}$$

При этом числа $\tau_{n+2-k,k}$, $\tau_{n+1-k,k}$ определяются из системы $2n+5$ линейных уравнений, определитель которой отличен от нуля, а коэффициенты c_{ij} многочлена $z_n(x, y)$ представимы в виде линейных комбинаций с известными коэффициентами от чисел $\tau_{n+2-k,k}$, $\tau_{n+1-k,k}$ и коэффициентов многочлена $f_{m+2}(x, y)$.

Доказательство. Положим

$$f_{m+2}(x, y) = \sum_{i=0}^{m+2} \sum_{j=0}^{m+2-i} f_{ij} x^i y^j, \quad T_{n+j}(z) = \sum_{i=0}^{n+j} t_i^{(n+j)} z^i \tag{8}$$

и покажем, что если в уравнение (5) вместо $z_n(x, y)$ и $\varepsilon_n(x, y)$ подставить их выражения (6) и (7), то это уравнение при достаточно малых $h > 0$ и $\sigma > 0$ будет обращаться в тождество при некоторых определенных значениях c_{ij}, $\tau_{n+2-k,k}$, $\tau_{n+1-k,k}$.

Действительно, с учетом (8) запишем

$$\varepsilon_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{n+2-i} \left(\frac{1}{h^i \sigma^j} \sum_{k=j}^{n+2-i} \tau_{n+2-k,k} t_i^{(n+2-k)} t_j^{(k)}\right) x^i y^j +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1-i} \left(\frac{1}{h^i \sigma^j} \sum_{k=j}^{n+1-i} \tau_{n+1-k,k} t_i^{(n+1-k)} t_j^{(k)}\right) x^i y^j. \tag{9}$$

Аналогично, учитывая (7), находим

$$\text{а)} \int\limits_{y/k}^{x} dt \int\limits_{kt}^{y} z_n(t, s)\, ds = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+2-i} c_{i-1,j-1} \frac{x^i y^j}{ij} -$$

$$- \sum_{i=2}^{n+2} \left(\sum_{j=2}^{i} \frac{c_{j-2,i-j} k^{i-j+1}}{i(i-j+1)}\right) x^i - \sum_{j=2}^{n+2} \left(\sum_{i=2}^{j} \frac{c_{j-i,i-2}}{j(j-i+1) k^{j-i+1}}\right) y^j; \tag{10}$$

б) $$\int\limits_{y/k}^{x}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} c_{ij}t^iy^jdt=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1-i} c_{i-1,j}\frac{x^iy^j}{i}-\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{c_{i-1,j-i}}{ik^i}\right)y^j; \quad (11)$$

в) $$\int\limits_{kx}^{y}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} c_{ij}x^is^jds=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n+1-i} c_{i,j-1}\frac{x^iy^j}{j}-\sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{c_{j-1,i-j}k^{i-j+1}}{i-j+1}\right)x^i. \quad (12)$$

Подставляя (9) — (12) в уравнение (5), получаем для определения неизвестных коэффициентов c_{ij} и параметров $\tau_{n+2-k,k}$, $\tau_{n+1-k,k}$ систему из $0{,}5\,(n^2+7n+12)$ линейных уравнений, при рассмотрении которой обнаруживаем, что:

а) искомые коэффициенты c_{ij} многочлена $z_n(x,y)$ последовательно представимы в виде линейных комбинаций подлежащих определению чисел $\tau_{n+2-k,k}$, $\tau_{n+1-k,k}$ и известных чисел f_{ij};

б) определитель D системы представляет собой многочлен по $\eta \overset{\mathrm{df}}{=} h^{-1}$

$$D=D(\eta)=\sum_{j=0}^{\lambda} d_j\eta^j,$$

где $\lambda=2\,(n+2)^2$, $d_\lambda=k^{-(n+2)^2}2^{2(n+1)^2}\neq 0$. Отсюда следует, что существует $h>0$, при котором определитель системы не равен нулю.

Из утверждений а) и б) следует справедливость теоремы 1.

Исследуя вопрос об уклонении многочлена $z_n(x,y)$ от решения задачи (1), (2), приходим к утверждению.

Теорема 2. *При любом $h>0$, при котором определитель системы не равен нулю, многочлен $z_n(x,y)$, коэффициенты которого определяются с помощью этой системы, обладает тем свойством, что*

$$|z(x,y)-z_n(x,y)|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n+2}|\tau_{n+2-k,k}|+\sum_{k=0}^{n+1}|\tau_{n+1-k,k}|\right)\times$$
$$\times\exp 4h\,(|ka|\,h+|d|+|kb|).$$

Доказательство. Действительно, из (3) и (5) имеем

$$|z(x,y)-z_n(x,y)|\leqslant|a|\left|\int\limits_{y/k}^{x}dt\int\limits_{kt}^{y}|z(t,s)-z_n(t,s)|\,ds\right|+$$
$$+|d|\left|\int\limits_{y/k}^{x}|z(t,y)-z_n(t,y)|\,dt\right|+|b|\left|\int\limits_{kx}^{y}|z(x,s)-z_n(x,s)|\,ds\right|+$$
$$+\sum_{k=0}^{n+2}|\tau_{n+2-k,k}|+\sum_{k=0}^{n+1}|\tau_{n+1-k,k}|.$$

Применяя обобщение леммы Гроноулла — Беллмана [4], получаем утверждение теоремы.

Пример. $z_{xy}=z+1,\ z|_{y=x}=0,\ z_x|_{y=x}=0,\ z_y|_{y=x}=0.$

Эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$z(x,y)=\int\limits_{y}^{x}dt\int\limits_{t}^{y}z(t,s)\,ds+xy-x^2/2-y^2/2.$$

Принимая во внимание (5) для $n=4$, имеем

$$z_4(x,y)=\int\limits_{y}^{x}dt\int\limits_{t}^{y}z_4(t,s)\,ds+xy-x^2/2-y^2/2-\varepsilon_4(xy),$$

где

$$z_4(x, y) = \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4-i} c_{ij}x^i y^j,$$

$$\varepsilon_4(x, y) = \sum_{k=0}^{6} \tau_{6-k,k} T_{6-k}\left(\frac{x}{h}\right) T_k\left(\frac{y}{\sigma}\right) + \sum_{k=0}^{5} \tau_{5-k,k} T_{5-k}\left(\frac{x}{h}\right) T_k\left(\frac{y}{\sigma}\right).$$

При $h = 1/2$ для определения коэффициентов c_{ij} и параметров $\tau_{6-k,k}$, $\tau_{5-k,k}$ получаем систему уравнений, решая которую, находим

$$z_4(x, y) = -0{,}0003224 + (1 - 0{,}00146704)\,xy -$$

$$-\frac{1}{2}(1 - 0{,}00801088)(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(1 - 0{,}03416320)\,x^2y^2 -$$

$$-\frac{1}{6}(1 - 0{,}05579008)(xy^3 + x^3y) + \frac{1}{24}(1 + 0{,}51019520)(x^4 + y^4)$$

и получаем оценку

$$\max_{-0,5\leqslant x,y\leqslant 0,5} |z(x, y) - z_4(x, y)| \leqslant 0{,}00012158l < 0{,}000331. \tag{13}$$

Поскольку точное решение этой задачи есть $z(x, y) = \cos(x - y) - 1$, то, разлагая его в ряд Тейлора, для многочлена Тейлора $t_4(x, y)$ имеем

$$\max_{-0,5\leqslant x,y\leqslant 0,5} |z(x, y) - t_4(x, y)| = \max_{-0,5\leqslant x,y\leqslant 0,5} |\cos(x - y) - 1 - t_4(x, y)| =$$

$$= |\cos 1 - 1 - t_4(1/2, -1/2)| > 0{,}001364. \tag{14}$$

Сопоставление (13) и (14) свидетельствует о преимуществе аппроксимационного метода.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 4, с. 937—967.
2. *Бурлаченко В. П., Сиденко Н. И.* О приближении по методу В. К. Дзядыка решения одной задачи, связанной с уравнением гиперболического типа.— В кн.: Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 5—19.
3. *Бурлаченко В. П., Романенко Ю. И.* О численном решении по методу В. К. Дзядыка задачи Гурса с постоянными коэффициентами.— Исслед. по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прил., 1977, вып. 8, с. 116—120.
4. *Бурлаченко В. П., Романенко Ю. И.* О приближении по методу В. К. Дзядыка решения задачи Гурса с многочленными коэффициентами.— В кн.: Теория функций и ее приложения.— Киев: Наук. думка, 1979, с. 50—60.

Полтавский
педагогический институт

Поступила в редакцию
30.12.1980 г.