УДК 517.92:531.36

К. С. Матвийчук

Замечания к методу сравнения для системы дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой

В данной статье для системы дифференциальных уравнений, содержащих одну быстро вращающуюся фазу [1, 2]. получены неравенства принципа сравнения для функции Ляпунова на основе обобщенного уравнения сравнения без требования условия монотонности на мажорирующую функцию [3] в соответствующем дифференциальном неравенстве и при некотором ослаблении условий регулярности на функцию Ляпунова.

Основные теоремы. Рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется n-мерным вектором переменных $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, угловой переменной α и описывается системой дифференциальных уравнений [2, 4]

$$\begin{aligned} dx_k/dt &= X_k(\alpha, x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, \ldots, n, \\ d\alpha/dt &= \lambda\omega(x_1, \ldots, x_n) + A(\alpha, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначения заимствованы из работы [4]. Пусть система определена в области

$$\Omega = \{x, \alpha, \lambda : (x, \alpha) \in D \subset R^{n+1}, \quad \lambda \in [\lambda_0, +\infty)\}. \tag{2}$$

Преобразуем систему (1) к виду [2]

$$\begin{aligned} dx_k/dt &= \mu X_k(\alpha, x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ d\alpha/dt &= \omega(x_1, \ldots, x_n) + \mu A(\alpha, x_1, \ldots, x_n), \quad \mu = 1/\lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

Предположим, что для системы (3) при $(x_{10}, \ldots, x_{n0}, \alpha_0) \in \operatorname{int}(D)$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0 = \mathrm{const} > 0$ существует непрерывное решение $(x_k(t), \alpha(t))$, $k = 1, \ldots, n$, при всех $t \geqslant 0$, где $x_{10} = x_1(t_0), \ldots, x_{n0} = x_n(t_0)$, $\alpha_0 = \alpha(t_0)$.

Используя общее решение $x = \mathrm{const}$, $\alpha = \varphi(t, x, c)$ вырожденной системы [2]

$$dx_k/dt = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \quad d\alpha/dt = \omega(x_1, \ldots, x_n) \tag{4}$$

и замену переменных

$$x = x, \quad \alpha = \varphi(t, x, c), \tag{5}$$

преобразуем [4, 5] систему (3) к виду

$$\begin{aligned} dx_k/dt &= \tilde{\mu} Z_k(\varphi(t, x, c), x) + R_k(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu}), \quad k = 1, \ldots, n, \\ d\alpha/dt &= \tilde{\mu} H(\varphi(t, x, c), x) + R_{n+1}(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu}), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\tilde{\mu}$ — фиксированное значение малого параметра $\mu \in (0, \mu_0]$.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dx_k/dt &= \tilde{\mu} Z_k(\varphi(t, x, c), x), \quad k = 1, \ldots, n, \\ d\alpha/dt &= \tilde{\mu} H(\varphi(t, x, c), x), \end{aligned} \tag{7}$$

правые части которой определены в области

$$\Omega_1 = \{x, c, t, \tilde{\mu} : \|x\| \leqslant h_1,\ |c| \leqslant h_2,\ 0 < \tilde{\mu} \leqslant \mu_0,\ h_1, h_2 = \text{const} > 0,\ t \geqslant 0\} \quad (8)$$

и при $t \geqslant t_0$, $x = c = 0$ равны нулю. Пусть система (7) в области Ω_1 имеет решение $x(t) = \bar{x}(t, t_0, x_0, c_0)$, $\alpha(t) = \bar{c}(t, t_0, x_0, c_0)$, $x(t_0) = x_0$, $\alpha(t_0) = c_0$. Обозначим векторы $R(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu}) = \{R_1(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu}), \ldots, R_{n+1}(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu})\}$, $\bar{X}(\varphi(t, x, c), x) = \{Z_1(\varphi(t, x, c), x), \ldots, Z_n(\varphi(t, x, c), x), H(\varphi(t, x, c), x)\}$. Системе (7) поставим в соответствие вещественную функцию Ляпунова $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$, которая определена в области $I \times \Omega$, непрерывно дифференцируема по (t, x, α), ее полная производная $\dot{V}(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$ определена почти всюду вдоль решений системы (7) и (6). Кроме того, выполнено условие $V(t, 0, \varphi(t, 0, 0), \tilde{\mu}) = 0$. Рассмотрим функцию $F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu})$, определенную в области

$$\mathcal{G} = \{|V| < R_1,\ t \geqslant t_0,\ R_1 > R = \sup[|V| \text{ при } (x, \alpha, \tilde{\mu}) \in \Omega] \text{ или } R_1 = \infty\}, \quad (9)$$

измеримую по t при фиксированных $(x, \alpha) \in \Omega$ и $V \geqslant 0$, обращающуюся в нуль при $V = 0$, $x = c = 0$, т. е. $F(t, 0, \varphi(t, 0, 0), 0, \tilde{\mu}) = 0$, непрерывную по x, α, V при фиксированных $t \in I$ и удовлетворяющую неравенству $|F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu})| \leqslant \mathcal{F}(t)$, где $\mathcal{F}(t)$ — суммируемая функция по $t \in I$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dy/dt = F(t, x, \alpha, y + \sigma(t, |\omega|), \tilde{\mu}), \quad (10)$$

правая часть которого удовлетворяет в области $\mathcal{G}$ указанным выше условиям, $\sigma(t, |\omega|)$ — заданная абсолютно непрерывная вдоль $x(t)$ функция. Определение верхнего $\bar{y}(t, t_0, y_0, \tilde{\mu})$, нижнего $\mathbf{y}_0(t, t_0, y_0\, \tilde{\mu})$ решений задачи (10) и обобщенного уравнения сравнения для системы уравнений с быстро вращающейся фазой (1) аналогично работе [4].

Теорема 1. *Пусть*:

1. *Выполняются условия, обеспечивающие в области Ω существование решения системы (1) на любом сколь угодно большом интервале времени $I_1 \subseteq I$.*

2. *Существует преобразование переменных $\alpha \to c$ вида (5), непрерывное и имеющее почти всюду непрерывные частные производные в области $\Omega_1 \subseteq \Omega$.*

3. *Существуют функции $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$ и $F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu})$, указанные выше, а также суммируемая функция $f(t, |\omega(x(t))|)$, для которых выполняются условия:*

а) *вдоль решений системы (7) почти всюду выполняется неравенство*

$$\partial V/\partial t + \tilde{\mu}(\operatorname{grad} V,\ \bar{X}(\varphi(t, x, c), x)) \leqslant F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu}); \quad (11)$$

б) *при $|\mu - \tilde{\mu}| \leqslant \mu_0$, $\mu_0 = \text{const} > 0$ на $\mathcal{I}_2 \subseteq I$ существует верхнее решение $\bar{y}(t, t_0, y_0, \tilde{\mu})$ задачи (9), когда $(x(t), y(t)) \in \Omega$, на $\mathcal{I}_2$ существует интеграл*

$$\sigma(t, |\omega|) = C \int_{t_0}^{t} f(\tau, |\omega(x(\tau))|)\, d\tau, \quad C = \text{const} > 0; \quad (12)$$

в) *почти всюду вдоль решений системы (6) справедливо неравенство*

$$|(\operatorname{grad} V, R(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu}))| \leqslant Cf(t, |\omega(x(t))|), \quad (13)$$

либо справедливо лишь условие 4.

4. *Вдоль решений системы (3) для приращений* $\Delta V(t) - \Delta\sigma(t, |\omega|)$ *на сколь угодно малом* $\Delta t \subset \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ *выполняется неравенство*

$$\Delta V(t) - \Delta\sigma(t, |\omega|) \leqslant \int_t^{t+\Delta t} F(\tau, x(\tau), \alpha(\tau), V(\tau), \tilde{\mu})\, d\tau. \tag{14}$$

Тогда для функции Ляпунова $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$ *вдоль решений системы (3) имеет место оценка*

$$V(t, x(t), \alpha(t), \tilde{\mu}) \leqslant \bar{y}(t, t_0, y_0, \tilde{\mu}) + \sigma(t, |\omega|) \tag{15}$$

при всех $t \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ *и любых* $y_0 \in A \subset (-\infty, \infty)$, *для которых* $V(t_0, x_0, \alpha_0, \tilde{\mu}) \leqslant y_0$.

Доказательство. Вычислим производную в силу системы (6). Учитывая компоненты вектора $R(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu})$ [4], получаем оценку

$$|(\operatorname{grad} V, R(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu}))| \leqslant \| \mu X(\alpha, x) - \tilde{\mu} Z(\varphi(t, x, c), x)\| \cdot \| \partial V/\partial x \| +$$

$$+ [| \mu A(\alpha, x) - \tilde{\mu} H(\varphi(t, x, c), x)| + |\omega(x)|] \cdot \partial V/\partial \alpha |. \tag{16}$$

Для $(t, x, \alpha) \in \mathcal{J}_2 \times \Omega$ можно указать такие достаточно малые $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, что при $|\mu - \tilde{\mu}| < \mu_1$, $|\mu - \tilde{\mu}| < \mu_2$ почти всюду будут выполняться соответственно неравенства

$$\begin{gathered} \| \mu X(\alpha, x) - \tilde{\mu} Z(\varphi(t, x, c), x) \| \cdot \| \partial V/\partial x \| \leqslant M f_1(t), \quad M = \text{const} > 0, \\ | \mu A(\alpha, x) - \tilde{\mu} H(\varphi(t, x, c), x)| \cdot |\partial V/\partial \alpha| \leqslant N f_2(t), \quad N = \text{const} > 0, \end{gathered} \tag{17}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — ограниченные измеримые функции на $\mathcal{J}_2$. Поэтому в качестве функции $Cf(t, |\omega(x(t))|)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, возьмем

$$Cf(t, |\omega(x(t))|) = C[f_1(t) + f_2(t) + |\omega(x(t))|], \tag{18}$$

где $C = \max(M, N)$. Следовательно, почти всюду на $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ вдоль решений системы (3) получаем оценку

$$dV(t)/dt \leqslant F(t, x, \alpha, V(t), \tilde{\mu}) + Cf(t, |\omega(x(t))|), \tag{19}$$

где $f(t, |\omega(x(t))|)$ — суммируемая функция (18), $V(t) = V(t, x(t), \alpha(t), \tilde{\mu})$ и

$$\sigma(t, |\omega|) = C \int_{t_0}^{t} f(\tau, |\omega(x(\tau))|)\, d\tau. \tag{20}$$

Тогда, например, по теореме 16.2 о дифференциальных неравенствах из работы [7] из неравенства (19) получаем оценку (15).

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим функцию $k(t) = V(t) - \sigma(t, |\omega|)$, где V, σ заданы выше. Из условий (15) следует, что для функции $k(t)$ почти всюду существует производная dk/dt. Более того, из (14) следует, что почти каждая точка $t \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ — точка Лебега. Следовательно, почти всюду справедливо неравенство

$$dk(t)/dt \leqslant F(t, x(t), \alpha(t), V(t), \tilde{\mu}), \tag{21}$$

которое эквивалентно неравенству (19). Отсюда получаем справедливость второй части теоремы.

Теорема 2. *Пусть*:

1. Выполняются условия 1, 2 теоремы 1.

2. *Существуют функции* $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$, $F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu})$ *с указанными выше свойствами и точки* $(x_0, \alpha_0) \in \Omega_0 \subseteq \Omega$, $t_0 \in \mathcal{J}_1$, $\tilde{y}_0 \in A \subset (-\infty, +\infty)$,

суммируемая функция $\tilde{\varphi}(t, |\omega(x(t))|)$ *на* $\mathfrak{J}_2$ *и некоторая постоянная* $\tilde{M}$ *такие, для которых при* $V(t_0) \geqslant \tilde{y}_0$ *выполнены условия:*

а)

$$|(\operatorname{grad} V, R(t, x, \alpha, c, \mu, \tilde{\mu}))| \geqslant \tilde{M}\tilde{\varphi}(t, |\omega(x(t))|) \tag{22}$$

почти всюду вдоль решений системы (6);

б) *почти всюду вдоль решений системы* (7) *справедливо неравенство*

$$\partial V/\partial t + \tilde{\mu}(\operatorname{grad} V, \bar{X}(\varphi(t, x, c), x)) \geqslant F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu}), \tag{23}$$

или верно лишь условие 3.

3. Вдоль решений системы (3) на любом $\Delta t \in \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$ *для приращений* $\Delta V(t) - \Delta\sigma(t, |\omega|)$ *выполняется неравенство*

$$\Delta V(t) - \Delta\sigma(t, |\omega|) \geqslant \int\limits_{t}^{t+\Delta t} F(\tau, x(\tau), \alpha(\tau), V(\tau), \tilde{\mu})\, d\tau. \tag{24}$$

Тогда для функции Ляпунова $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$ *имеет место оценка снизу*

$$V(t, x(t), \alpha(t), \tilde{\mu}) \geqslant \underline{y}(t, t_0, \tilde{y}_0, \tilde{\mu}) + \sigma(t, |\omega|) \tag{25}$$

в некотором совместном временном интервале существования решения $(x(t), \alpha(t))$ *системы (3) и решения* $\underline{y}(t, t_0, \tilde{y}_0, \tilde{\mu})$ *уравнения сравнения*

$$dy/dt = F(t, x, \alpha, y + \sigma(t, |\omega|), \tilde{\mu}), \quad y(t_0) = \tilde{y}_0, \quad (x_0, \alpha_0) \in \Omega. \tag{26}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с несущественными изменениями.

Рассмотрим случай менее гладкой функции Ляпунова $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$ [6, 7].

Теорема 3. *Пусть:*

1. Выполнены условия 1, 2 теоремы 1.

2. Существует функция Ляпунова $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$, *определенная в области* $I \times \Omega$, *локально липшицева по* (t, x, α), *почти всюду вдоль решений системы* (7) *и* (6) *существуют производные Дини* [6] *и выполнено условие* $V(t, 0, \varphi(t, 0, 0), \tilde{\mu}) = 0$, *а также существуют указанные в теореме 1 функции* $f(t, |\omega(x(t))|)$, $F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu})$, *для которых либо выполняются условия:*

а) *вдоль решений системы* (7) *почти всюду выполняется неравенство*

$$D^+V(t, \varphi(t)) \leqslant F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu}); \tag{27}$$

б) выполняется условие 3, б) теоремы 1;

в) почти всюду вдоль решений системы (6) *справедливо неравенство*

$$\|R(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu})\| \leqslant \tilde{C}f(t, |\omega(x(t))|), \ \tilde{C} = \mathrm{const} > 0, \tag{28}$$

либо справедливо лишь условие 3.

3. В случае указанной в условии 2 функции Ляпунова V выполняется условие 4 теоремы 1 вдоль решений системы (3).

Тогда для функции Ляпунова $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$ *вдоль решений системы* (3) *справедлива оценка* (15) *при всех* $t \in \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$, *любых* $y_0 \in A \subset (-\infty, +\infty)$ *и* $V(t_0, x_0, \alpha_0, \tilde{\mu}) \leqslant y_0$.

Доказательство. Вычислим [6] производную Дини $D^+V(t)$ вдоль решений системы уравнений (6). Учитывая условия 2 теоремы 3, для производной $D^+V(t)$ получаем оценку

$$D^+V(t) \leqslant D^+V(t, \varphi(t)) + M\|R(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu})\|, \quad M = \mathrm{const} > 0, \tag{29}$$

справедливую почти всюду по $t \in \mathcal{I}_2 \subseteq I$. Оценивая величину $M\|R(t, \alpha, x, c, \mu, \tilde{\mu})\|$, при $t \in \mathcal{I}_2 \subseteq I$ получаем неравенства и соотношения вида (17), (18), (20), отличающиеся от аналогичных в случае теоремы 1 лишь постоянными. Следовательно, почти всюду на $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ вдоль решений системы (3) имеет место оценка

$$D^+V(t) \leqslant F(t, x, \alpha, V(t), \tilde{\mu}) + \tilde{C}f(t, |\omega(x(t))|), \tag{30}$$

где $f(t, |\omega(x(t))|)$ — построенная суммируемая функция вида (18). Из неравенства (30) получаем оценку (15) на основе теоремы 16.2 работы [7].

Так как неравенство

$$D^+k(t) \leqslant F(t, x(t), \alpha(t), V(t), \tilde{\mu}), \tag{31}$$

для функции $k(t) = V(t) - \sigma(t, |\omega|)$, следующее из условия 3, и справедливое почти всюду по $t \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, эквивалентно неравенству (30), то вторая часть теоремы 3 получается аналогично доказательству второй части теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть:*

1. Выполняется условие 1 теоремы 3.

2. Существуют функции $V(t, x, \alpha, \tilde{\mu})$, $F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu})$, указанные в теореме 3, точки $(x_0, \alpha_0) \in \Omega_0 \subseteq \Omega$, $t_0 \in \mathcal{I}_1$, $\tilde{y}_0 \in A \subset (-\infty, +\infty)$, суммируемая функция $\tilde{\varphi}(t, |\omega(x(t))|)$ на $\mathcal{I}_2 \subseteq I$ и некоторая постоянная $\tilde{M}$ такие, что при $V(t_0) \geqslant \tilde{y}_0$ выполнены условия:

а) почти всюду вдоль решений системы (7) выполняется неравенство

$$D_-V(t, \varphi(t)) \geqslant F(t, x, \alpha, V, \tilde{\mu}), \tag{32}$$

б) почти всюду вдоль решений системы (6) имеет место неравенство

$$\|R(t, x, \alpha, c, \mu, \tilde{\mu})\| \geqslant \tilde{M}\tilde{\varphi}(t, |\omega(x(t))|); \tag{33}$$

или верно условие 3.

3. Вдоль решений системы (3) на произвольном $\Delta t \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, $\Delta t > 0$ в случае функции Ляпунова V, указанной в теореме 3, для приращений $\Delta V(t) - \Delta\sigma(t, |\omega|)$ справедливо неравенство (24).

Тогда имеет место оценка снизу (25).

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3 с некоторыми дополнениями.

Отметим, что теоремы 3, 4 можно получить и для остальных производных Дини [7].

Пример. Рассмотрим уравнение колебаний математического маятника

$$m\ddot{\alpha} + (mg/l)\sin\alpha = 0, \tag{34}$$

где m — масса; α — угловое отклонение; g — ускорение свободного падения; l — длина маятника. Уравнение (34) эквивалентно системе двух уравнений [8]. Вводя замену $\tau = Tt$, получаем

$$dx/dt = -gT^2l^{-1}\sin y,\ dy/dt = x,\ y = \alpha, \tag{35}$$

где T — период колебаний.

Принимая величину gT^2l^{-1} в (35) за «малый параметр», обозначим $\mu = gT^2l^{-1}$. Систему (35) рассмотрим при начальных условиях

$$x(t_0) = x_0,\quad y(t_0) = y_0,\quad E = mx_0^2/2 + mgl(1 - \cos y_0) \geqslant 2mgl \tag{36}$$

в области $\mathcal{D} \times I_1$, где $\mathcal{D} = \{x, y, \mu: -A \leqslant x \leqslant A,\ -\infty < y < +\infty,\ 0 < \mu \leqslant \mu_0 = \mathrm{const} > 0\}$, $t \in I_1 = [0, \mu^{-1}]$, $A = \sqrt{x_0^2 + 2gl^{-1}(1 - \cos y_0)}$, E — полная энергия системы.

Как известно [8], указанный выбор начальных условий соответствует движению маятника в режиме вращения.

Используя общее решение $x = \text{const}$, $\varphi = c + x(t - t_0)$ вырожденной системы

$$dx/dt = 0, \quad dy/dt = x, \tag{37}$$

с помощью замены переменных (5) получаем систему уравнений типа (7)

$$dx/dt = -\tilde{\mu}\sin\varphi, \quad dy/dt = \tilde{\mu}(t - t_0)\sin\varphi, \tag{38}$$

где $\tilde{\mu}$ — значение малого параметра, соответствующее некоторому фиксированному $\tilde{l} \neq l$, правые части которой превращаются в нуль при $x = c = 0$ и определены в области $\mathscr{D}_1 \times I_2$, где

$$\mathscr{D}_1 = \{x, \varphi, \tilde{\mu} : -\tilde{A} \leqslant x \leqslant \tilde{A}, \quad -\infty < \varphi < +\infty, \; 0 < \tilde{\mu} \leqslant \mu_0 = \text{const} > 0\},$$

$$t \in I_2 = [0, \tilde{\mu}^{-1}] \;\; \tilde{A} = \sqrt{x_0^2 + 2g\tilde{l}^{-1}(1 + \cos y_0)}$$

Для системы (38) строим функцию Ляпунова в форме

$$V(t, x, y, \tilde{\mu}) = e^{t-t_0}\sqrt{x^2 + \tilde{\mu}(\sin^2 x + \sin^2 y)}. \tag{39}$$

Представим исходную систему в виде

$$dx/dt = -\tilde{\mu}\sin\varphi + R_1, \quad dy/dt = \tilde{\mu}(t - t_0)\sin\varphi + R_1, \tag{40}$$

где $R_1 = \tilde{\mu}\sin\varphi - \mu\sin y$, $R_2 = x - (t - t_0)\tilde{\mu}\sin\varphi$.

Полная производная функции Ляпунова (39) в силу системы (40) имеет при $\mu_1 = \eta_1 - 3\tilde{\mu}$, $\mu_2 = (2\tilde{\mu})^{-1}(\eta_1 - 1 - \tilde{\mu})$, $\eta_1 = \text{const} > 0$, $\eta_2 = \text{const} > 0$ оценку

$$dV/dt \leqslant \sin^2[V(t, x, y, \tilde{\mu}) - \sigma(t, |x|)] + e^{t-t_0}(A + 2\tilde{\mu}A + 2A\eta_1 + \eta_2), \tag{41}$$

где

$$\sigma(t, |x|) = \int_{t_0}^{t} [A(1 + 2\tilde{\mu} + 2\eta_1) + \eta_2]\exp(\tau - t_0)\, d\tau.$$

Используя (39), выберем функцию $k(t) = V(t, x(t), y(t), \tilde{\mu}) - \sigma(t, |x|)$, которая абсолютно непрерывна по $t \in I_1 \cap I_2$ (разность двух абсолютно непрерывных по t функций). Следовательно, легко убедиться в выполнении для функции $k(t)$ условия 4 теоремы 1, откуда получаем неравенство вида (21) $dk(t)/dt \leqslant \sin^2(V(t, x(t), y(t), \tilde{\mu}) - \sigma(t, |x|))$.

Рассмотрим уравнение сравнения $dv/dt = \sin^2 v$, $v(t_0) = v_0$, $v_0 \geqslant V(t_0)$, решением которого есть функция $v(t) = \operatorname{arcctg}[\operatorname{ctg} v_0 + t_0 - t]$. Согласно теореме 1 при $t \in I_1 \cap I_2$ имеем оценку $V(t, x(t), y(t), \tilde{\mu}) \leqslant \operatorname{arcctg}[\operatorname{ctg} v_0 + t_0 - t] + \sigma(t, |x|)$ вдоль решения исходной системы (34).

1. *Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н.* Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле.— Укр. мат. журн., 1955, 7, № 1, с. 5—17.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.—440 с.
3. *Rao M. R. M.* A note on an integral inequality.— J. Indian Math. Soc., 1963, **24**, N 2, p. 69—71.
4. *Мартынюк А. А., Матвийчук К. С.* О принципе сравнения для системы уравнений с одной вращающейся фазой.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 5, с. 498—503.
5. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Ташкент : Фан, 1971.—279 с.
6. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.—300 с.
7. *Szarski J.* Differential Inequalities.— Warszawa: PWN, 1967.—256 p.
8. *Волосов В. М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук, 1962, **17**, № 6, с. 3—126.

Институт механики
АН УССР

Поступила в редакцию 31.03. 1980 г.
после переработки — 28.10. 1981 г.