УДК 517.946+519.63+519.633

В. Г. Самойленко, А. К. Прикарпатский

Периодическая задача для цепочки Тода

1. Введение. Цель статьи — явное интегрирование уравнений движения периодической цепочки Тода [1]

$$\partial^2 q_n/\partial t^2 = \exp(q_{n-1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n+1}), \quad q_n(t) \in R^1, \quad n = 1, 2, \ldots, N+1, \tag{1}$$

описывающей динамику $N+1$ частиц на прямой, взаимодействующих с экспоненциальным потенциалом. В работах [2, 3] уравнения движения (1) были проинтегрированы в быстроубывающем случае методом обратной задачи теории рассеяния, что позволило найти для этого уравнения «дискретные» солитонные решения. Периодическая задача для уравнения (1) решалась в работах [4—6], что позволило записать решение $q_n(t)$ в явном виде в терминах многомерных тэта-функций Римана. Затем в работе [7] для решений цепочки Тода получены рекуррентные формулы с помощью метода Дарбу-преобразований.

В данной работе периодическая задача для уравнения (1) исследуется при помощи метода, первоначально предложенного в работе [8] для уравнения Кортевега—де Фриза и развитого затем для дискретного модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза [9].

2. Вывод основных уравнений дискретного аналога периодического варианта метода обратной задачи теории рассеяния. Как показано в [2, 3], уравнение цепочки Тода (1) допускает представление типа Лакса на матрицах второго порядка, зависящих от произвольного спектрального параметра $\lambda \in \mathbf{C}^1$, которое можно записать согласно [4] в виде

$$\partial \mathcal{L}_n(\lambda)/\partial t = \mathcal{M}_{n+1}(\lambda)\mathcal{L}_n(\lambda) - \mathcal{L}_n(\lambda)\mathcal{M}_n(\lambda), \tag{2}$$

где

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ -a_n & -(b_n - \lambda)a_n^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} b_n - \lambda & 2 \\ -2a_n^2 & \lambda - b_{n+1} + a_n^{-1}\dfrac{\partial a_n}{\partial t} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$a_n = 0{,}5\exp 0{,}5(q_{n-1} - q_n), \quad b_n = -0{,}5\frac{\partial}{\partial t}q_{n-1}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Прямым вычислением легко убедиться, что уравнение (2) остается справедливым для всех $\lambda \in \mathbf{C}^1$, если функции $q_n(t)$ удовлетворяют уравнениям (I).

В дальнейшем считаем, что функция $q_n(t)$ — $(N+1)$-периодическая по индексу n

$$q_{n+N+1}(t) \equiv q_n(t) \qquad (\mathrm{mod}\, K), \tag{4}$$

где $K \in \mathbf{R}^1$ — произвольное действительное число. Рассмотрим следующие линейные задачи на вектор-функцию $\mathfrak{u}_n(t) \in \mathbf{C}^2$:

$$\mathfrak{u}_{n+1} = \mathcal{L}_n(\lambda)\mathfrak{u}_n, \quad \partial \mathfrak{u}_n/\partial t = \mathcal{M}_n(\lambda)\mathfrak{u}_n. \tag{5}$$

Записывая условие совместности уравнений (5) в виде $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_{n+1}=$ $=\left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right)\Big|_{m=n+1}$, находим, что матрицы $\mathscr{L}_n(\lambda)$ и $\mathscr{M}_n(\lambda)$ должны удовлетворять уравнению (2). Это значит, что на решениях уравнения цепочки Тода (1) линейные задачи (5) совместны при всех n и t.

В силу периодичности (4) функции $q_n(t)$ для уравнений (5) определена матрица монодромии $S_n=S_n(t,\lambda)$ [9] по формуле

$$\mathbf{u}_{n+N+1}=S_n\mathbf{u}_n. \tag{6}$$

Из первого уравнения в (5) находим для S_n явную формулу

$$S_n=\prod_{j=0}^{\overleftarrow{N}}\mathscr{L}_{n+j}, \tag{7}$$

где $\overleftarrow{N}$ указывает на порядок возрастания индексов в произведении (7). Итак, согласно (3) и (7), нами доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Матрица монодромии $S_n(t,\lambda)$ для линейных задач (5) — полиномиальная по параметру λ матричная функция.*

Получим дифференциально-разностные уравнения, которым удовлетворяет матрица монодромии $S_n(t,\lambda)$. Из определения (7) следует первое соотношение

$$S_{n+1}\mathscr{L}_n=\mathscr{L}_nS_n. \tag{8}$$

Подставив (6) во второе уравнение (5), легко находим второе соотношение

$$\partial S_n/\partial t=[\mathscr{M}_n, S_n]. \tag{9}$$

Эти уравнения на S_n будут для нас в дальнейшем главными, поэтому исследуем дополнительно их свойства. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для системы дифференциально-разностных уравнений (8) и (9) величины* $\det S_n$ и $\operatorname{Sp} S_n$ *являются абсолютными инвариантами*:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\det S_n=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Sp}S_n=0,\\ \det S_n=\det S_m,\ \operatorname{Sp}S_n=\operatorname{Sp}S_m,\ m,n\in\mathbf{Z}.\end{gathered} \tag{10}$$

Доказательство очевидно.

Введем такие обозначения: $S_n=\|S_n^{(ij)}\|$, $i,j=1,2$, $S_n^{(11)}+S_n^{(22)}=2h_n$ $S_n^{(11)}-S_n^{(22)}=2f_n$, $S_n^{(12)}=-\varphi_n$, $S_n^{(21)}=\chi_n$. Тогда уравнения (8) и (9) эквивалентны следующим:

$$\begin{gathered}(f_{n+1}-f_n)\cdot 0=a_n^{-1}\chi_n-a_n\varphi_{n+1},\\ (f_{n+1}-f_n)(b_{n+1}-\lambda)a_n^{-1}=\varphi_na_n-\chi_{n+1}a_n^{-1},\\ (f_{n+1}+f_n)a_n^{-1}=-(b_{n+1}-\lambda)a_n^{-1}\varphi_{n+1},\\ (f_{n+1}+f_n)a_n=-(b_{n+1}-\lambda)a_n^{-1}\chi_n,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\partial f_n/\partial t=2(\chi_n-\varphi_na_n^2),\\ \partial\varphi_n/\partial t=(b_n+b_{n+1}-2\lambda-a_n^{-1}\partial a_n/\partial t)\varphi_n+4f_n,\\ \partial\chi_n/\partial t=(2\lambda-b_n-b_{n+1}+a_n^{-1}\partial a_n/\partial t)\chi_n-4a_n^2f_n.\end{gathered} \tag{12}$$

Согласно лемме 1 системы уравнений (11), (12) обладают полиномиальным по параметру λ решением $f_n(t,\lambda)$, $\varphi_n(t,\lambda)$, $\chi_n(t,\lambda)$, которое запишем в виде

$$f_n(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N+1}f_n^{(k)}(t)\lambda^k,\quad \varphi_n(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_n^{(k)}(t)\lambda^k,\quad \chi_n(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\chi_n^{(k)}(t)\lambda^k. \tag{13}$$

Кроме того, согласно лемме 2 из формул (10) следует инвариантность полинома

$$P(\lambda) = f_n^2 - \chi_n \varphi_n = \sum_{k=0}^{2N+2} p_k \lambda^k, \tag{14}$$

где числа p_k не зависят от n и t.

Изучим более детально свойства решений (13) уравнений (11) и (12). Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Систгмы дифференциально-разностных уравнений* (11) *и* (12) *допускают полиномиальное по параметру* λ *решение* (13) *тогда и только тогда, когда функции* $f_n^{(k)}(t)$, $\varphi_n^{(k)}(t)$ *и* $\chi_n^{(k)}(t)$ *удовлетворяют некоторым совместным дифференциально-разностным автономным нелинейным уравнениям, причем справедливы соотношения*

$$\begin{gathered}\partial f_n^{(N+1)}/\partial t = \partial f_n^{(N)}/\partial t = 0,\ f_n^{(N+1)} = f_m^{(N+1)},\ f_n^{(N)} = f_m^{(N)},\ \varphi_n^{(N)} = 2f_n^{(N+1)},\\ \chi_n^{(k)} = a_n^2 \varphi_{n+1}^{(k)},\ 2f_n^{(N)} = -b_{n+1}\varphi_n^{(N)} + \varphi_n^{(N-1)},\ k = 0, 1, \ldots, N,\ m, n \in \mathbf{Z}.\end{gathered} \tag{15}$$

Если к тому же в некоторой точке $n = n_0$ *при* $t = 0$ *заданы условия*

$$\begin{gathered} f_{n_0}^{(k)*}(0) = f_{n_0}^{(k)}(0),\ \chi_{n_0}^{(N)*}(0)\,\chi_{n_0}^{(N-1)}(0) = \chi_{n_0}^{(N-1)*}(0)\,\chi_{n_0}^{(N)}(0),\\ \chi_{n_0}^{(N)*}(0)\,\chi_{n_0}^{(N-2)}(0) = \chi_{n_0}^{(N-2)*}(0)\,\chi_{n_0}^{(N)}(0),\end{gathered} \tag{16}$$

то эти нелинейные автономные уравнения имеют решение для всех n *и* t, *и соотношения* (15) *приводят к алгоритму построения явного действительного решения* $q_n(t)$ *уравнения* (1).

Доказательство. Подстановкой решений (13) в системы (11) и (12) с учетом произвольности параметра λ находим некоторые системы дифференциально-разностных нелинейных автономных уравнений, причем алгебраические соотношения (15) выражают условие их совместности. Используя эти соотношения и разрешимость автономных уравнений, приходим к явным формулам для решения $q_n(t)$. Для их уточнения поставим периодическую задачу Коши для уравнения (1): по заданному значению $q_{n_0}(0) = q_0$ найти периодическое по индексу n решение $q_n(t)$ уравнения (1).

Будем считать, как и ранее, период функции $q_n(t)$ равным $N+1$. Это значит, что нам необходимо отыскать набор величин

$$\{q_n(t)\},\ n = n_0,\ n_0+1, \ldots, n_0+N, \tag{17}$$

где n_0 — произвольное целое число.

Рассмотрим полином $\chi_n(t, \lambda)$ в форме

$$\chi_n(t, \lambda) = \chi_n^{(N)}(t) \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j(n, t)), \tag{18}$$

где $\mu_j(n, t)$ — его нули. Тогда из (15) находим

$$\frac{\partial}{\partial t} q_n(t) = 2\frac{f_n^{(N)}}{f_n^{(N+1)}} + 2\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n, t). \tag{19}$$

Здесь величины $f_n^{(N)}$ и $f_n^{(N+1)}$ согласно (15) инварианты уравнений (11) и (12) и определены однозначно условиями (16). Из этих же условий находим, что функция $q_n(t)$ в равенстве является действительной. Подставляя разложение (18) в третье уравнение системы (12), находим уравнение для нулей $\mu_j(n, t)$

$$\partial\mu_j/\partial t = 2\sqrt{P(\mu_j)}\,(f_n^{(N+1)})^{-1} \prod_{i \neq j} (\mu_j - \mu_i)^{-1}. \tag{20}$$

Предположим, что мы определили явно при помощи уравнений (20) значение величины $\sum_{j=1}^{N} \mu_j(n_0, t)$ по заданным начальным значениям $\mu_{j,0} = \mu_j(n_0, 0)$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда по формуле (19) прямым интегрированием находим функцию $q_{n_0}(t)$ по значению $q_{n_0}(0) = q_0$

$$q_{n_0}(t) = q_0 + \frac{2f_n^{(N)}}{f_n^{(N+1)}} t + 2 \int_0^t \sum_{j=1}^{N} \mu_j(n_0, \tau)\, d\tau. \tag{21}$$

Чтобы найти элемент набора функций (17) — функцию $q_{n_0+1}(t)$, рассмотрим равенство, легко получаемое из системы (11) и формулы (14)

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = 0{,}5\,[(f_n^{(N)})^2 - p_{2N}]/p_{2N+2} + \sum_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{N} \mu_i \mu_j + b_{n+1} \sum_{j=1}^{N} \mu_j(n, t). \tag{22}$$

Уравнение (1) запишем в виде

$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = 0{,}25\partial^2 q_n(t)/\partial t^2. \tag{23}$$

Отсюда в предположении явной разрешимости уравнений (20) при $n = n_0$ следует явная формула для решения $q_{n_0+1}(t)$. Действительно, вычитая из уравнения (22) уравнение (23), находим

$$2a_{n+1}^2 \equiv \frac{1}{2} \exp(q_n(t) - q_{n+1}(t)) = \frac{(f_n^{(N)})^2 - p_{2N}}{2p_{2N+2}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{N} \mu_i(n, t) +$$

$$+ \sum_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{N} \mu_i(n, t)\, \mu_j(n, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial q_n(t)}{\partial t} \sum_{j=1}^{N} \mu_j(n, t) = Q_n(t). \tag{24}$$

Отсюда легко запишем общую рекуррентную формулу для решений $q_n(t)$ уравнения (1) по индексу n

$$q_{n+1}(t) = q_n(t) - \ln 2Q_n(t). \tag{25}$$

Итак, по явной функции $q_{n_0}(t)$, определенной из формулы (21), находим явное выражение для функции $q_{n_0+1}(t)$

$$q_{n_0+1}(t) = q_{n_0}(t) - \ln 2Q_{n_0}(t), \tag{26}$$

где согласно предположениям относительно разрешимости уравнений (20) при $n = n_0$ функция $Q_{n_0}(t)$ (24) является известной. Доказательство разрешимости уравнений (20) мы проведем далее. Построим элемент $q_{n_0+2}(t)$ из набора (17). Для этого нам необходимо согласно (24) и (25) найти в явном виде выражения: $\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0 + 1, t)$ и $\sum_{i<j} \mu_i(n_0 + 1, t)\, \mu_j(n_0 + 1, t)$. Пользуясь функцией $q_{n_0+1}(t)$ (26), по формуле (19) находим

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_j(n_0 + 1, t) = -\frac{f_{n_0}^{(N)}}{f_{n_0}^{(N+1)}} + 0{,}5 \frac{\partial}{\partial t} q_{n_0+1}(t). \tag{27}$$

Рассмотрим равенство, получаемое из (12) и (14) при $n = n_0 + 1$,

$$\sum_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{N} \mu_j(n_0 + 1, t)\, \mu_i(n_0 + 1, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0 + 1, t) \frac{\partial}{\partial t} q_n(t) + 2a_{n_0+1}^2 -$$

$$- 0{,}5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{n_0+1}(t) + 0{,}5\,(p_{2N} - (f_{n_0}^{(N)})^2)\, p_{2N+2}^{-1}. \tag{28}$$

Так как выражения $\sum_{i=1}^{N} \mu_i (n_0 + 1, t)$ и $a_{n_0+1}(t)$ уже определены выше формулами (24) и (27), то формула (28) дает в явном виде нужное соотношение $\sum_{i<j}^{N} \mu_j (n, t) \mu_i (n, t)$ при $n = n_0 + 1$. Подставляя выражения (27) и (28) в формулу (25) при $n = n_0 + 1$, находим элемент $q_{n_0+2}(t)$ из набора (17). Этот алгоритм можно аналогично использовать для определения остальных функций $q_{n_0+j}(t)$, $j=3, 4, \dots, N$, из набора (17). Теорема доказана.

3. **Интегрирование уравнений цепочки Тода. Проблема Якоби обращения абелевых интегралов на гиперэллиптических римановых поверхностях.** В п. 2 мы доказали теорему реконструкции решения периодической задачи Коши для уравнения (1) при условии явного интегрирования уравнений (20). Чтобы исследовать это условие, рассмотрим систему автономных дифференциальных уравнений (20) как систему [4, 5], заданную на гиперэллиптической римановой поверхности Γ рода N функции $w = \sqrt{P(z)}$. Начальные данные $\mu_{j,0} = \mu_j (n_0, 0)$ определим как точки на Γ, которые тождественно удовлетворяют соотношению $\sum_{k=0}^{N+1} f_{n_0}^{(k)}(0) \mu_{j,0}^k = \sqrt{P(\mu_{j,0})}$. Пусть E_j, $j = 1, 2, \dots$ $\dots, 2N + 2$, — нули полинома $P(\lambda)$. Поверхность Γ реализуем в виде двулистной поверхности наложения комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с разрезами $(\infty, E_1], \dots, [E_{2j}, E_{2j+1}], \dots, [E_{2N+2}, \infty)$. На поверхности Γ имеется две бесконечно удаленные точки ∞^+ и ∞^-, расположенные соответственно на верхнем $(z, +\sqrt{P(z)})$ и нижнем $(z, -\sqrt{P(z)})$ листах. При этом функция $\sqrt{P(z)}$ будет однозначной аналитической функцией на поверхности Γ. Циклы, образующие базис одномерной группы гомологий, будем, как обычно, обозначать через a_i и b_i, $i = 1, 2, \dots, N$, считая, что кривая a_i расположена на верхнем листе поверхности Γ и обходит по часовой стрелке отрезок $[E_{2i}, E_{2i+1}]$, а кривая b_i начинается в точке E_{2i+1}, по верхнему листу приходит в точку E_{2N+2} и по нижнему листу возвращается снова в точку E_{2i+1}. На поверхности Γ существует [10, 11] базис абелевых интегралов первого рода, который задается формулами

$$\omega_j(z) = \sum_{k=0}^{N-1} C_j^{(k)} \int_{E_{2N+2}}^{z} \lambda^k [P(\lambda)]^{-\frac{1}{2}} d\lambda. \tag{29}$$

Нормируем базис (29) условиями

$$\oint_{a_i} d\omega_j(\lambda) = \delta_{ij}, \qquad \oint_{b_i} d\omega_j(\lambda) = B_{ij}. \tag{30}$$

Матрица $B = \| B_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, называется матрицей Римана. Она симметрична, а ее мнимая часть положительно определена. Построим теперь при помощи базиса (29) отображение Абеля

$$\nu_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \omega_j (\mu_i (n_0, t)), \tag{31}$$

где функции $\mu_i (n_0, t)$ удовлетворяют уравнениям (20). Тогда легко показать, что $\partial \nu_j(t)/\partial t = 2C_j^{(N-1)} (f_{n_0}^{(N+1)})^{-1}$. Отсюда выражение (31) примет вид

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_j (\mu_i (n_0, t)) = \sum_{i=1}^{N} \omega_j (\mu_i (n_0, 0)) + 2tC_j^{(N-1)} (f_{n_0}^{(N+1)})^{-1},$$

т. е. функции $\mu_i (n_0, t) \in \Gamma$ решают проблему Якоби обращения абелевых интегралов на гиперэллиптической римановой поверхности Γ.

Для ее решения согласно [10, 11] рассмотрим N-мерную θ-функцию Римана, построенную по матрице периодов (I, B) (30) базиса абелевых интегралов (29)

$$\theta(\vec{u}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbf{Z}^N} \exp\{2\pi i (\vec{m}, \vec{u}) + \pi i (B\vec{m}, \vec{m})\},$$

где $\mathbf{Z}^N$ — пространство целочисленных векторов в $\mathbf{R}^N$, вектор $\vec{u} \in \mathbf{C}^N$ и $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение. Тогда в силу того, что функция $\Theta(z) = \theta(\vec{e} - \vec{\omega}(z))$, где

$$e_j = \alpha_j t + \gamma_j, \quad \alpha_j = 2C_j^{(N-1)} (f_{n_0}^{(N+1)})^{-1},$$
$$\beta_j = C_j^{(N-2)} (f_{n_0}^{(N+1)})^{-1}, \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_{i,0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} B_{ij} - \frac{1}{2} j, \tag{32}$$

аналитична на поверхности Γ с разрезами по a-циклам, а ее нули совпадают с точками $\mu_j(n_0, t) \in \Gamma$, находим

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(\vec{\alpha} t + \vec{\gamma} - \vec{r})}{\theta(\vec{\alpha} t + \vec{\gamma} + \vec{r})} + \sum_{i=1}^{N} \oint_{a_i} \lambda d\omega_i(\lambda); \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i^2(n_0, t) = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln[\theta(\vec{\alpha} t + \vec{\gamma} - \vec{r})\, \theta(\vec{\alpha} t + \vec{\gamma} + \vec{r})] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \oint_{a_i} \lambda^2 d\omega_i(\lambda) + \frac{1}{2} p_{2N+1} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(\vec{\alpha} t + \vec{\gamma} - \vec{r})}{\theta(\vec{\alpha} t + \vec{\gamma} + \vec{r})} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \left. \frac{\theta(\vec{\alpha} t + \vec{\gamma} + \vec{\beta}\tau - \vec{r})}{\theta(\vec{\alpha} t + \vec{\gamma} + \vec{\beta}\tau + \vec{r})} \right|_{\tau=0}. \tag{34}$$

Так как

$$2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j=}}^{N} \mu_i(n_0, t)\, \mu_j(n_0, t) = \left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0, t) \right)^2 - \sum_{i=1}^{N} \mu_i^2(n_0, t), \tag{35}$$

то формулы (33) — (35) решают полностью задачу вычисления явных решений $q_{n_0+j}(t)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, уравнения (1), что следует из результатов п. 2.

Итак, сформулируем основной результат работы в виде следующей конструктивной теоремы.

Теорема 2. *Пусть заданы произвольные попарно-разные числа* $E_j \in \mathbf{C}^1$, $j = 1, 2, \ldots, 2N+2$ *и числа* $\mu_{i,0} = \mu_i(n_0, 0) \in \mathbf{C}^1$, $i = 1, 2, \ldots, N$, *которые удовлетворяют условию*

$$\prod_{i=1}^{2N+2} (\mu_{j,0} - E_i) = f_{n_0}^2(\mu_{j,0})\, [f_{n_0}^{(N+1)}]^{-2},$$

где $f_{n_0}(\lambda)$ — *полином степени* $N+1$ *с действительными коэффициентами. Тогда существует решение периодической задачи Коши для уравнения цепочки Тода* (1), *которое находится изложенным выше алгоритмом в явном виде.*

Как обычно [12], класс периодических решений уравнения цепочки Тода можно существенно увеличить при помощи вырождения римановой поверхности Γ, задающей решения. В общем виде, как видно из формул (32) и (33), решение $q_n(t)$ будет периодической функцией по индексу n и почти-периодической функцией по переменной t.

1. *Toda M.* Waves in nonlinear lattice.— Suppl., Progress Theor. Physics, 1970, **45**, p. 174—200.
2. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах.— Журн. эксп. и теорет. физики, 1974, **67**, № 2, с. 543—555.
3. *Flaschka H.* On the Toda lattice, II.— Progress Theor. Physics, 1974, **51**, No. 3, p. 703—716.
4. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— Успехи мат. наук, 1976, **31**, № 1, с. 55—136.
5. Date E., Tanaka S. Analog of inverse scattering theory for discrete Hill's equation and exact solutions for the periodic Toda lattice.— Progress Theor. Physics, 1976, **55**, No. 2, p. 217—222.
6. *Кричевер И. М.* Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.— Успехи мат. наук, 1978, **33**, № 4, с. 215—216.
7. *Matveev V. B., Salle M. A.* Differential-difference evolution equations. II. Darboux transformations for the Toda lattice.— Lett. Math. Physics, 1979, 3, No. 5, p. 425—429.
8. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега — де Фриза.— Мат. сб., 1974, **95**, с. 331—356.
9. *Боголюбов Н. Н. (мл), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега—де Фриза.— Теор. и мат. физика, 1982, **50**, № 1, с. 118—126.
10. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях.— Успехи мат. наук, 1971, **26**, № 1, с. 113—179.
11. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.— М.: Гостехиздат, 1948.— 320 с.
12. *Matveev V. B.* Abelian functions and solitons. — Wroclaw: University, 1976.— 98 p.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
06.11.1980 г.