УДК 517.5

*М. Я. Житомирский*

# О конечной определенности дифференциальных форм

Цель статьи — выяснение вопроса о конечной определенности дифференциальных форм первой степени относительно группы замен пространственной переменной в терминах свойств линейного приближения формы, а также полная классификация форм от одной, двух и трех переменных.

Пусть $K$ — поле комплексных или вещественных чисел; $K[n]$ — пространство всех формальных отображений $F: K^n \to K^n$ таких, что $F(0) = 0$. Их можно рассматривать как $n$-компонентные степенные ряды без свободных членов с коэффициентами из $K$.

Будем рассматривать формы вида $w = f_1(x)\,dx_1 + \ldots + f_n(x)\,dx_n$, где $f_i$ — формальные степенные ряды, $f_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Каждой из них соотнесем отображение $F = (f_1, \ldots, f_n)$ из $K[n]$. При замене координат $x = \Phi(y)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = I$ новой форме будет соответствовать отображение $(\Phi')^t F(\Phi)$. Поэтому задача классификации форм относительно указанных преобразований сводится к классификации пространства $K[n]$ относительно следующего действия группы:

$$G = G[n] = \{\Phi : K^n \to K^n,\ \Phi(0) = 0,\ \Phi'(0) = I\}.$$

$$\Phi.F = (\Phi')^t F(\Phi),\ \ \Phi \in G,\ \ F \in K[n].$$

Пусть $K_i[n]$ — пространство рядов с нулевыми коэффициентами при $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, когда мультииндекс $\alpha$ таков, что $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n > i$, $K^{(i)}[n] = K_i[n] - K_{i-1}[n]$, $P_i$, $P^{(i)}$ — естественные проекторы на $K_i[n]$, $K^{(i)}[n]$, $P_i F = F_i$, $P^{(i)} F = F^{(i)}$.

Ряд $P_i F$ называется $i$-струей ряда $F$.

Пусть $L[G]$ — алгебра Ли группы $G$. Все предыдущие обозначения можно распространить на $L[G]$ и ее элементы, поскольку $L[G] \approx K^{(2)}[n] + K^{(3)}[n] + \ldots$.

Для любых $\lambda \in L[G]$ и $F \in K[n]$ справедливо равенство $\exp\lambda . F = F + S(F)\lambda + R(F)\lambda$, где $\exp : L[G] \to G$ — экспоненциальное отображение, $S(F)$ — производная в единице группы $G$ отображения $g \to g . F$ ($g \in G$, $F \in K[n]$), $R(F)$ — нелинейное по $\lambda$ отображение. Вычисляя $S(F)$, получим $S(F)\lambda = F'\lambda + (\lambda')^t F$. Заметим, что если

$$P_i F = 0,\ \ P_j \lambda = 0,\ \text{ то }\ P_{i+j} S(F)\lambda = 0. \tag{1}$$

Это свойство будет существенно использовано.

Пусть $L(F, i)$ — ограничение $S(P_1 F)$ на $K^{(i)}[n]$. Очевидно, $L(F, i) : K^{(i)}[n] \to K^{(i)}[n]$.

Справедливо следующее утверждение [2, 4]. Пусть $F \in K[n]$. Тогда существует ряд $H \in K[n]$, эквивалентный $F$ (относительно действия группы $G$) и такой, что $H_1 = F_1$, $H^{(i)} \in \operatorname{Ker} L^*(F, i)$, $i \geqslant 2$. Ряд $H$ имеет так называемую неполную нормальную форму. С ее помощью можно определить целочисленный инвариант ряда.

Лемма. *Пусть $H, F \in K[n]$, имеют неполную нормальную форму и эквивалентны. Пусть $H^{(i)} = F^{(j)} = 0$, $2 \leqslant i < m$, $2 \leqslant j < n$, $H^{(m)} \neq 0$, $F^{(n)} \neq 0$. Тогда $m = n$, $H^{(m)} = F^{(n)}$.*

Действительно, исходя из условия, нетрудно показать, что $m$-струя ряда $H$ и $n$-струя $F$ приведены к полной нормальной форме, определенной в [2], которая является инвариантом относительно действия группы. Но тогда $k$-струи $H$ и $F$ должны совпадать при $k = \max(m, n)$, откуда и следует лемма.

Тем самым определен целочисленный инвариант ряда $F$, который будем обозначать $p(F)$. Отображение $H^{(k)}$, где $H$ — неполная нормальная форма $F$, а $k = p(F)$, также инвариант. Обозначим его $\tau(F)$.

По определению ряд называется $k$-определенным, если ему эквивалентен любой ряд с той же $k$-струей. Ряд $F$ называется конечно-определенным, если он $k$-определен при некотором $k < \infty$.

Определим операторы $D(F, s): K[n] \to \operatorname{Ker} L^*(F, s)$, $E(F, s): K[n] \to \operatorname{Im} L(F, s)$ как суперпозиции проектора $P^{(s)}$ с ортопроекторами на $\operatorname{Ker} L^*(F, s)$ и $\operatorname{Im} L(F, s)$ соответственно. Обозначим через $T(F, s)$ линейные операторы, зависящие от ряда $F$ и натурального $s > p(F)$, действующие из $\operatorname{Ker} L(F, s - p(F) + 1)$ в $\operatorname{Ker} L^*(F, s)$ по правилу $T(F, s)\lambda = D(F, s) S(\tau(F))\lambda$.

Теорема 1. *Пусть $d$ — максимальное из таких чисел $s$, что оператор $T(F, s)$ — не сюръективен. Тогда ряд $F$ либо $d$-определен (если $p(F) < \infty$), либо эквивалентен $P_1F$ (если $p(F) = \infty$).*

Доказательство. Если $p(F) = \infty$, то ряды $F$ и $P_1F$ эквивалентны, что следует из определения неполной нормальной формы. Пусть теперь $p(F) < \infty$. Выберем произвольное отображение $\mu$ из $K^{(i)}[n]$, где $i$ — произвольное число, большее $d$. Согласно [2] достаточно проверить, что уравнение $P_iS(F)\lambda = \mu$ имеет решение $\lambda \in L[G]$. Поскольку оператор $T(F, i)$ — сюръективен, то найдется $\psi_1 \in \operatorname{Ker} L(F, i - p(F) + 1)$ такое, что $D(F, i) S(\tau(F))\psi_1 = D(F, i)\mu$. Пусть $\psi_2 \in K^{(i)}[n]$ таково, что $L(F, i)\psi_2 = E(F, i)\mu - E(F, i) S(\tau(F))\psi_1$. Пользуясь свойством (1), линейностью оператора $S(\tau(F))$ и выбором $\psi_1$ и $\psi_2$, можно получить $P_iS(\tau(F))(\psi_1 + \psi_2) = \mu$, что и требовалось.

Будем считать, что $n$ — четное число. Зафиксируем ряд $F \in K[n]$. Пусть $A$ — матрица его линейного приближения, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $A^{-1}A^t$. Ограничимся случаем, когда они отличны от $0, \pm 1$ и различны. Согласно [4] числа $\lambda_j$ можно занумеровать так, чтобы $\lambda_j\lambda_{n+1-j} = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Впредь будем считать, что они так и занумерованы. Пусть $\gamma_j = (\lambda_j - 1)^{-1}$, $\nu(j) = \dim \operatorname{Ker} L(F, j)$, $\pi(j)$ — число пар $k$, $(\alpha)$, $k \in (1, \ldots, n)$, $|\alpha| = j$, для которых $\lambda_k(\lambda_k - 1)^{-1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i - 1)^{-1} = 0$ или

$$\gamma_{k_1} = \alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n, \quad k_1 = n + 1 - k. \tag{2}$$

Соотношения (2) назовем резонансными. В работе [4] показано, что $\nu(j) = 0$ тогда и только тогда, когда $\pi(j) = 0$. Более того, из [4] легко получить, что $\nu(j) = 1/2\,\pi(j)$.

Пусть $\Gamma_F$ — полугруппа мультииндексов $(\alpha)$, $|\alpha| \geqslant 2$, таких, что $\alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n = 0$. Будем говорить, что линейное приближение ряда $F$ удовлетворяет условию одного резонанса, если резонансные соотношения вида $\gamma_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i$, $\alpha_k = 0$, отсутствуют, а полугруппа $\Gamma_F$ имеет одну образующую. Если $(\beta)$ — образующая $\Gamma_F$, то число $|\beta|$ назовем степенью резонанса, числа $r_k = k|\beta| + 1$, $k = 1, 2, \ldots$ — резонансными. Ядро $L(F, j)$ — ненулевое тогда и только тогда, когда $j$ — резонансное число. Число $p(F)$ — всегда резонансное. Если $t$ — число резонансное, то и $t + p(F) - 1$ — резонансное.

Исходя из этих определений и свойств резонансных чисел, сформулируем следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть линейное приближение ряда $F$ удовлетворяет условию одного резонанса, $p(F) < \infty$, а $p$ — максимальное из чисел $s$, таких, что оператор $T(F, r_s)$ вырожден. Тогда ряд $F$ $r_p$-определен.*

Если через $d(s)$ обозначить определитель матрицы оператора $T(F, r_s)$, то легко заключить, что $d(s)$ — полином от $s$. Тогда справедливо такое следствие.

Следствие 2. *Пусть линейное приближение ряда $F$ удовлетворяет условию одного резонанса, $p(F)<\infty$ и оператор $T(F, r_s)$ невырожден при некотором $s$. Тогда ряд $F$ конечно-определен.*

Определим оператор $T(F, s)$ и при $s=p(F)$. Под $\operatorname{Ker} L(F, 1)$ будем понимать множество таких линейных отображений с матрицей $B$, для которых $AB+B^tA=0$ ($A$ — матрица $P_1F$). Вычисления показывают, что оператор $T(F, p(F))$ невырожден. Учитывая следствие 2, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если линейное приближение ряда $F$ удовлетворяет условию одного резонанса и $p(F)<\infty$, то ряд $F$ конечно-определен.*

Укажем теперь другое свойство линейного приближения ряда, при выполнении которого он не может быть конечно-определенным.

Теорема 3. *Пусть $\sup\limits_j \nu(F, j)=\infty$. Тогда ряд $F$ не является конечно-определенным.*

Доказательство. Если $p(F)=\infty$, то ряд $F$ эквивалентен $P_1F$ и не может быть конечно-определенным, поскольку найдется сколь угодно большое $s$ такое, что $\operatorname{Ker} L(F, s)\neq\{0\}$.

Пусть теперь $p(F)<\infty$. Предположим что ряд $F$ $k$-определен. Тогда и ряд $P_kF$ $k$-определен. Согласно критерию Мазера [1, 2] уравнение

$$S(P_kF)\lambda=\mu_{k+1}+\ldots+\mu_{k+s} \tag{3}$$

должно иметь решение для любого $s$ и $\mu_{k+i}\in\operatorname{Ker} L^*(F, k+i)$ (в частности). Это уравнение — линейная система для коэффициентов при $\lambda^{(j)}$, когда $j\leqslant k+s-p(F)+1$ (мы воспользовались свойством (1)). Правая часть (3) в указанных рамках произвольна, число неизвестных равно $n=\nu(F,2)+\ldots+\nu(F,t)$, $t=k+s-p(F)+1$, число уравнений равно $m=\sum\limits_{j=1}^{s}\nu(F, k+j)$. При достаточно больших $s$ $n<m$, и мы приходим к противоречию. Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Если полугруппа $\Gamma_F$ имеет две или более образующих, то ряд $F$ не является конечно-определенным.*

Условие следствия 3 будет выполнено, в частности, тогда, когда для некоторого $(\alpha)$, $|\alpha|\geqslant 2$, выполнены условия $\alpha_1\gamma_1+\ldots+\alpha_n\gamma_n=0$ и найдется такое $k$, что $\alpha_k\neq 0$, $\alpha_{n+1-k}\neq 0$.

Следствие 4. *Если матрица $A$ линейного приближения $P_1F$ такова, что $A=A^t$, то ряд $F$ не может быть конечно-определенным.*

Действительно, в этом случае $\nu(F, j)$ совпадает с числом мультииндексов, по модулю равных $j$ и выполнено условие теоремы 3.

Отметим, что если полугруппа $\Gamma_F$ пуста, то может быть выполнено не более конечного числа резонансных соотношений. Доказать это можно по схеме доказательства аналогичного факта в [3]. Но тогда $F$ либо конечно-определен, либо эквивалентен $P_1F$.

Этот факт и утверждения теорем 2, 3 позволяют решать вопрос о конечной определенности в следующих случаях: либо выполнено условие одного резонанса, либо $\Gamma_F$ пуста, либо $\Gamma_F$ содержит более одной образующей. Нерассмотренным остается «промежуточный» случай, когда $\Gamma_F$ содержит одну образующую, но не выполнено условие одного резонанса. В этом случае вопрос о конечной определенности уже не может быть решен в терминах линейного приближения. Это показывает следующий пример.

Пусть $n=8$, $A$ — матрица линейного приближения $P_1F$ и такая, что $\gamma_1=\sqrt{2}$, $\gamma_2=-2\sqrt{2}$, $\gamma_3=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\gamma_4=\sqrt{3}$, $\gamma_i=-1-\gamma_{9-i}$, $i\geqslant 5$. $\Gamma_F$ имеет одну образующую: $(2, 1, 0, \ldots, 0)$, условие одного резонанса не выполнено ввиду резонансных соотношений $\gamma_3=(2k+1)\gamma_1+k\gamma_2+\gamma_4$, $\gamma_4=(2k-1)\gamma_1+k\gamma_2+\gamma_3$, $k=1, \ldots$ Применяя теорему 1 и рассуждая по ходу доказательства теоремы 3, получаем, что при $F=P_1F+g$, $g\in\operatorname{Ker} L^*(F, j)$ ряд $F$ конечно-определен тогда и только тогда, когда $j$ делится на 3 с остатком 1.

Применим полученные результаты при $n = 2$. Пусть $A$ — матрица $P_1F$, $\lambda$ и $\lambda^{-1}$ — собственные числа $A^{-1}A^t$. Возможны следующие варианты.

а) Числа $\lambda$ и $\lambda^{-1}$ не вещественные или иррациональные, или отрицательные нецелые. Тогда $F$ эквивалентен $P_1F$ и все ряды с таким линейным приближением эквивалентны.

в) Одно из чисел $\lambda$ или $\lambda^{-1}$ равно $-M$, где $M$ — натуральное число. В этом случае $\operatorname{Ker} L(F, j) \neq \{0\}$ только при $j = M$, и согласно лемме для рядов с таким линейным приближением коэффициенты $\tau(F)$ являются полной системой инвариантов.

с) $\lambda = pq^{-1}$, где $p$ и $q$ — несократимые натуральные числа. В этом случае выполнено условие одного резонанса, степень резонанса равна $p + q$. Согласно теореме 2 ряд $F$ конечно определен. Пользуясь следствием 1, получаем более сильный результат: если $p(F) = t(p + q) + 1$ для некоторого $t$ (а $p(F)$ обязательно имеет такой вид), то ряд $F$ $(2t(p + q) + 1)$-определен. Таким образом, найдется ряд $H$, эквивалентный $F$ такой, что $H = P_1F + \tau(F) + \tau_1(F)$, где $\tau_1(F) \in \operatorname{Ker} L^*(F, 2t(p + q) + 1)$. Нетрудно показать, что для рядов с таким линейным приближением (удовлетворяющим условию $c$)) полной системой инвариантов служат коэффициенты $\tau(F)$ и $\tau_1(F)$.

Мы провели полную классификацию $K[2]$, то есть форм от двух переменных.

Рассмотрим теперь случай нечетного $n > 1$. Пусть $n = 2k + 1$. В [4] показано, что неполная нормальная форма ряда $F \in K[n]$ есть ряд вида $H = (H_1, \ldots, H_k, x_{k+1}, H_{k+2}, \ldots, H_{2k+1})$, где отображение $H_i$ не зависит от $x_{k+1}$ при $i \neq k + 1$ (если только линейное приближение ряда $F$ заранее приведено к каноническому виду [4]).

Пусть $W$ — отображение из $K[2k + 1]$ в $K[2k]$, $W(F) = A_1x + H$. Здесь $H = (H_1, \ldots, H_k, H_{k+2}, \ldots, H_{2k+1})$, $A_1$ получается из $A$ отбрасыванием $(k + 1)$-й строки и $(k + 1)$-го столбца. Отображение $W$ сохраняет свойство эквивалентности рядов. Поэтому с его помощью все предыдущие результаты переносятся на случай нечетного $n$. В частности получаем классификацию $K[3]$.

При $n = 1$ $F = a_1x + a_2x^2 + \ldots$ . Легко видеть, что ряды $F_1$ и $F_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $P_1F_1 = P_1F_2$, $p(F_1) = p(F_2)$.


1. *Мазер Дж.* Устойчивость $C^\infty$ отображений.— Математика. Период. сб. пер. иностр. статей, 1970, **14**, № 1, с. 146—175.
2. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения.— Киев: Наук. думка, 1979.— 173 с.
3. *Гомозов Е. П.* Конечная определенность ростков диффеоморфизмов относительно сопряженности.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 9, с. 773—775.
4. *Житомирский М. Я.* Об эквивалентности дифференциальных форм.— Теория функций, функцион. ализ и их прил., 1981, вып. 35, с. 35—41.



Харьковский
институт радиоэлектроники



Поступила в редакцию
14.12.1980 г.